Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Georg-August-Universität
zu Göttingen

vorgelegt von

Heinrich Grell
aus Lüdenscheid

Göttingen 1926.

Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin. 1927.

Mathematische Annalen, Band 97, Seite 490—558

Von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
genehmigte Dissertation

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Juli 1926

Referent: Prof. E. Noether

Korreferent: Prof. E. Landau

BIBLIOTHEEK RIJKS UNIV. LEIDEN

Druck von Oscar Brandstetter, Leipzig.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548122_0217

Die Frage nach den Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe ist so alt wie die Idealtheorie selbst. Die Zerfällung einer ganzen rationalen Zahl in einem endlichen algebraischen Zahlkörper, genauer die Zerlegung des daraus in der Hauptordnung [1]) abgeleiteten Ideals, bildet das erste Beispiel. In unmittelbarem Zusammenhang damit steht die ganze Theorie der Verzweigung mit den bekannten Diskriminanten- und Differentensätzen, wie sie vor allen Dedekind entwickelt hat [2]). Es reihen sich an die von Hilbert gelieferten Untersuchungen über das Verhalten der aus rationalen Zahlen abgeleiteten Hauptideale beim Durchgang durch die Hauptordnungen gewisser Unterkörper eines Galoisschen Zahlkörpers [3]), sowie die von Dedekind dazu gegebenen Verallgemeinerungen und Ergänzungen [4]). Noch früher finden sich in der Literatur Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ordnungen eines und desselben Körpers: es sei erinnert an die Festschrift zu Gauß' hundertjährigem Geburtstag [5]), in der Dedekind die Theorie der von Hilbert als regulär bezeichneten, d. h. zum Führer nach der Hauptordnung teilerfremden Ideale einer Ordnung entwickelt. Handelt es sich bei diesen Fragen auch hauptsächlich

[1]) Für die hier auftretenden Begriffe „Hauptordnung", „Ordnung", „primäre Komponenten" usw. siehe E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen **96** (1926), S. 26—61 (zitiert mit N). Als Ordnung eines algebraischen Zahlkörpers bezeichnet man mit Dedekind jeden darin enthaltenen Ring aus ganzen algebraischen Zahlen, der das System aller ganzen rationalen Zahlen umfaßt.

[2]) R. Dedekind, Über die Discriminanten endlicher Körper, Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften **29** (1882).

[3]) D. Hilbert, Zahlbericht, § 38—47.

[4]) R. Dedekind, Zur Theorie der Ideale, Göttinger Nachrichten 1894, S. 272ff.

[5]) R. Dedekind, Über die Anzahl der Idealklassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers. Braunschweig 1877.

um die Zerlegung der Ideale in paarweise teilerfremde, größte primäre Komponenten, so tritt bei den Hilbertschen Untersuchungen doch wesentlich der Begriff des Grades hinzu, durch den ebenso wie den der Norm eine feinere, rein modultheoretische Charakterisierung des Ideals erzielt wird.

Bisher nicht so scharf ausgesprochen, aber doch immer dem Sinn nach, finden sich ähnliche Fragen in den Gebieten, die sich um die Idealtheorie des Polynombereichs gruppieren, d. h. in der Theorie der algebraischen Funktionen und der Eliminationstheorie. Beidemal handelt es sich im Grund um das Auftreten von Quotientenringen und das gegenseitige Verhalten gewisser Ideale dieses Bereiches und des Ausgangsringes. So hat Krull [6]) die Bestimmung der Ordnung des Verschwindens (oder Unendlichwerdens) einer algebraischen Funktion in einem Punkt der abstrakten Riemannschen Fläche durch Einführung seiner Punktringe wesentlich übersichtlicher gemacht. Zum andern gehören an diese Stelle die in den Arbeiten von Hentzelt-Noether [7]), E. Noether [8]), Grete Hermann [9]) und v. d. Waerden [6]) auftretenden Grundideale und reduzierten Ideale. Hier berührt sich ferner die Bestimmung von Grad und Norm aufs engste mit der der Multiplizität in der algebraischen Geometrie, und schreitet man von da aus weiter zu der Lehre von den Singularitäten algebraischer Gebilde, so kommt man zurück auf die Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ordnungen ein und desselben Funktionenkörpers.

In der vorliegenden Arbeit werden diese Fragen zum erstenmal von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus betrachtet. Losgelöst von den soeben skizzierten Problemen bringt sie, ohne Voraussetzung irgendwelcher Endlichkeitsbedingungen, die Grundlagen der Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe; die Anwendung dieser allgemeinen Betrachtungen auf die Ordnungen von Zahl- und Funktionenkörpern ist einer weiteren Arbeit vorbehalten. Dabei zeigt es sich von vornherein, daß nicht so sehr die zugrunde gelegten Ringe, als vielmehr gewisse Mengen von Idealen, die *Idealkörper*, das wesentliche sind. Sie bilden einen Sonderfall der *Modulkörper*, unter denen man Systeme von Moduln mit Verknüpfungs- und Ordnungsbeziehungen, ähnlich wie die gewöhnlichen Körper, zu verstehen hat, und genau wie bei diesen ergeben sich die Begriffe der (*arithmetischen*) *Isomorphie und Ähnlichkeit*. Die Auffassung,

---

[6]) Nach persönlicher Mitteilung durch Manuskripte.

[7]) Hentzelt-Noether, Zur Theorie der Polynomideale und Resultanten, Math. Annalen **88** (1922), S. 53—79.

[8]) E. Noether, Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie, Math. Annalen **90** (1923), S. 229—261.

[9]) G. Hermann, Die Frage der endlichvielen Schritte in der Theorie der Polynomideale, Math. Annalen **95** (1926), S. 736—788.

die in den Moduln und Idealen selbst, nicht aber in den Ringelementen die Hauptsache sieht, zieht sich bei genauem Hinsehen durch das ganze Dedekindsche XI. Supplement[10]). Ganz scharf ausgesprochen aber hat sie Dedekind in der Arbeit „Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe“[11]). Während bei den Modul*körpern* die vier Verknüpfungen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auftreten, besitzen die in der erwähnten Arbeit behandelten *Dual-* oder Modul*gruppen* lediglich die Verbindungen der Addition und Subtraktion. Zwischen Modulkörpern und Modulgruppen herrscht demnach im großen das gleiche Verhältnis wie zwischen gewöhnlichen Körpern und gewöhnlichen Gruppen, wenn auch natürlich in den Einzelheiten starke Unterschiede auftreten.

Die Frage nach den Beziehungen zwischen den Idealen eines beliebigen Systems von Ringen wird zunächst für den speziellen Fall von Ober- und Unterring erledigt (§ 3). In den beiden jeweilig aus der Gesamtheit der Ideale bestehenden Idealkörpern existiert je eine ausgezeichnete Menge von Idealen: die *Erweiterungsideale* im Oberring, die *Verengungsideale* im Unterring. Die beiden Mengen sind einander eineindeutig und ähnlich zugeordnet und erlauben ein Aufspalten jedes der beiden Idealkörper in *Klassen* mit eineindeutigem Entsprechen (§ 4).

Werden diese Resultate auf den Vereinigungs- und Durchschnittsring eines beliebigen Ringsystems angewandt, so liefern sie für jeden Ring des Systems Klasseneinteilungen und gewisse ausgezeichnete Mengen von Idealen, die *Kerne*. Genau wie oben die beiden Mengen der Erweiterungs- und Verengungsideale besitzen die Kerne zweier beliebiger Ringe eine eineindeutige Zuordnung, die bezüglich der Ringe reflexiv, symmetrisch und transitiv ist (§ 5).

Mit den Begriffen der §§ 3, 4 allein erledigen sich schon die *Quotientenringe* (§ 6). Ihre Idealtheorie ist durch die des Ausgangsringes vollkommen bestimmt. Es gilt nämlich, daß das System der Verengungsideale des Ausgangs- und dasjenige aller Ideale des Quotientenringes zueinander isomorphe Idealkörper sind.

Weiterhin wird der Dedekindsche *Führer*begriff für ein beliebiges Ringsystem aufgestellt und die Theorie der *zum Führer teilerfremden Ideale* der Ringe des Systems entwickelt (§ 7). Die Systeme der soeben erwähnten Ideale bilden untereinander isomorphe Idealkörper; dabei haben

---

[10]) Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, IV. Auflage, S. 434–657 (zitiert mit Z. IV; die III. Aufl. entspr. mit Z. III).

[11]) Math. Annalen **53** (1900), S. 371–403. Auf diese Arbeit machte mich nachträglich E. Noether aufmerksam; vgl. auch die dann noch erschienene Note von W. Krull, Axiomatische Begründung der allgemeinen Idealtheorie, Berichte der phys.-med. Sozietät in Erlangen **56** (1924).

einander entsprechende Ideale ringisomorphe Restklassenringe. Der Grund dafür liegt hierin: jedes zum Führer teilerfremde Ideal stellt für sich einen Kern dar, und einander nach § 5 entsprechende Kerne besitzen ringisomorphe Restklassenringe. Daraus folgt das angegebene Resultat unter Benutzung eines Satzes über den Zusammenhang zwischen Ring- und arithmetischem Isomorphismus (§ 2, 2). Als Spezialfall folgen die Dedekindschen Resultate über reguläre Ideale einer Ordnung [12]).

Eine weitere Frage ist die nach dem *Zusammenhang zwischen Führer- und Ringzerlegung* (§ 8). Besteht das zugrunde gelegte Ringsystem aus Ober- und Unterring, so ergibt sich aus einer vorausgesetzten Zerlegung des Führers in endlich viele paarweise teilerfremde Komponenten im Unterring für diesen eine Darstellung als direkter Durchschnitt bez. des Oberringes (vgl. hier § 2). Die Führer dieser Ringkomponenten nach Unter- und Oberring sind das Komplement einer Komponente der Führerzerlegung und ihr Erweiterungsideal im Oberring. Ein Furtwänglerscher Satz über die Zerlegung eines Führers in Komponenten mit paarweise teilerfremden Normen in der Hauptordnung eines endlichen algebraischen Zahlkörpers ordnet sich hier als spezielles Ergebnis ein [13]).

In der schon vorhin angekündigten zweiten Arbeit „Zur Theorie der Ordnungen in Zahl- und Funktionenkörpern" handelt es sich ausschließlich um Idealkörper, die aus der Gesamtheit der Ideale endlicher nullteilerfreier P-Ordnungen (vgl. N. § 1) bestehen, in denen mod. den vom Nullideal verschiedenen Idealen der Doppelkettensatz gilt (N., Einleitung). Diese Voraussetzung, verbunden mit gruppentheoretischen Hilfsmitteln, führt zu einer vollständigen Theorie des Grades und der Norm von Idealen in *beliebigen* endlichen Ordnungen algebraischer Zahlkörper und anderen ihnen verwandten, in N. § 3 näher bezeichneten Bereichen. In Verallgemeinerung eines Dedekindschen Satzes [14]) ergibt sich für sie weiter eine Charakterisierung aller derjenigen Ideale, die Führer nach Unterordnungen sind. Als Anwendung der §§ 7, 8 der vorliegenden Arbeit bekommt man schließlich noch Grad- und Kompositionsreihensätze über Ideale in verschiedenen Ordnungen; sie stellen eine weitgehende Ausdehnung gewisser Multiplizitätsfragen der algebraischen Geometrie dar, die zuerst B. L. v. d. Waerden berührt hat [6]).

---

[12]) Vgl. den 1. Abschnitt dieser Einleitung.

[13]) Ph. Furtwängler, Über die Führer von Zahlringen, Wiener Berichte 128 (1919), S. 239–245, Satz 2.

[14]) Vgl. die Fußnote zu S. 28 der in [2]) zitierten Dedekindschen Arbeit.

§ 1.

Modul- und Idealkörper.

1. Modulkörper. M sei ein System von Elementen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$. In M bestehe eine den drei Gesetzen der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität genügende *Gleichheitsbeziehung*, derzufolge zwei beliebige Elemente $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ aus M gleich $(\mathfrak{A} = \mathfrak{B})$ oder ungleich $(\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B})$ heißen. Ferner seien in M *vier Verknüpfungen* definiert, durch die jedem geordneten Paar $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ von Elementen eindeutig [15]) ihre *Summe* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, ihre *Differenz* $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, ihr *Produkt* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und ihr *Quotient* $\mathfrak{A} : \mathfrak{B}$ zugeordnet wird. Dann heißt M ein *System mit vierfacher Komposition* [16]).

Zwei solche Systeme M_1, M_2 heißen *isomorph*, wenn zwischen den Elementen von M_1 und denen von M_2 eine eineindeutige Zuordnnng besteht, derart, daß Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier Elemente des einen Systems das Resultat derselben Verknüpfung der entsprechenden Elemente des andern zugeordnet ist.

Das System M heißt ein *Modulkörper* und die Elemente $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ *Moduln*, falls für die vier Verknüpfungen noch gewisse *Axiome* erfüllt sind; ein Isomorphismus zweier Modulkörper wird zur Unterscheidung von dem zweier gewöhnlicher Körper als *arithmetischer Isomorphismus* bezeichnet. Die Axiome [17]) sind nun:

I. 1) $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$; 2) $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$;
3) $\mathfrak{A} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$,

II. 1) $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \mathfrak{B} - \mathfrak{A}$; 2) $(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) - \mathfrak{C} = \mathfrak{A} - (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})$;
3) $\mathfrak{A} - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$,

III. 1) $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$; 2) $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$.

Aus den Axiomen I 3) und II 3) ergibt sich sofort

Satz 1. $\mathfrak{A} + \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$.

Beweis. Ersetzt man in I 3) $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, so folgt die Behauptung unter Benutzung von II 3). Ganz entsprechend kommt

Satz 2. $\mathfrak{A} - \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$.

---

[15]) Vgl. hierzu N. Fußnote [6]).

[16]) Vgl. Steinitz, Algebr. Theorie der Körper, § 1; Journal f. Math. **137** (1910), S. 167–309.

[17]) Die Axiome sind natürlich so gewählt, daß sie mit den Sätzen übereinstimmen, die für die in üblicher Weise aus den Elementen eines Ringes gebildeten Moduln gelten. — Unter einer *Modulgruppe* ist im folgenden ein System M von Moduln mit Gleichheitsrelationen, den beiden Verknüpfungen der Summen- und Differenzbildung sowie der Gültigkeit der beiden Axiomgruppen I und II und des ersten distributiven Gesetzes verstanden, entsprechend der in [11]) erwähnten Dedekindschen Arbeit.

Die beiden Axiomgruppen I und II seien verbunden durch das

1. distributive Gesetz: Wenn $\mathfrak{A}+\mathfrak{C}=\mathfrak{C}$ ist, so gelte $\mathfrak{A}+(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})=(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})-\mathfrak{C}$. Die Brücke zwischen den beiden Verknüpfungen Summe und Produkt bildet das

2. distributive Gesetz: $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})=\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, die zwischen Differenz und Quotient *das dazu duale*

3. distributive Gesetz: $(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}):\mathfrak{C}=\mathfrak{A}:\mathfrak{C}-\mathfrak{B}:\mathfrak{C}$.

Das 1. distributive Gesetz ist zu sich selbst dual. Um das einzusehen, genügt es, zu bemerken, daß aus $\mathfrak{A}-\mathfrak{C}=\mathfrak{C}$ nach I 3), 1) folgt $\mathfrak{C}+\mathfrak{A}=(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})+\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$. Also hat man $\mathfrak{C}+(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})=(\mathfrak{C}+\mathfrak{B})-\mathfrak{A}$, somit wegen I 1), II 1) die zweite Form des 1. distributiven Gesetzes. Da man ganz entsprechend auch in umgekehrter Richtung schließen kann, folgt die Behauptung.

Allein die beiden ersten Verknüpfungen der Summen- und Differenzenbildung erlauben, den Modulkörper zu einer *teilweise geordneten Menge* zu machen[18]). Nach Hausdorff[19]) versteht man darunter eine Menge, in der für zwei beliebige Elemente $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ stets eine einzige der vier Relationen $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ gleich $\mathfrak{B}$), $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ früher als $\mathfrak{B}$), $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ später als $\mathfrak{B}$), $\mathfrak{A} \parallel \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ unvergleichbar) besteht. Und zwar soll in M sein

$$\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B} \text{ für } \begin{cases} \mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}-\mathfrak{B}=\mathfrak{A}, \end{cases}$$

$$\mathfrak{A} < \mathfrak{B} \quad \text{„} \quad \begin{cases} \mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}-\mathfrak{B}\neq\mathfrak{A}, \end{cases}$$

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{B} \quad \text{„} \quad \begin{cases} \mathfrak{A}+\mathfrak{B}\neq\mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}-\mathfrak{B}=\mathfrak{A}, \end{cases}$$

$$\mathfrak{A} \parallel \mathfrak{B} \quad \text{„} \quad \begin{cases} \mathfrak{A}+\mathfrak{B}\neq\mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}-\mathfrak{B}\neq\mathfrak{A}. \end{cases}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Verknüpfungen und Satz 1 und 2 folgt aus $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ immer $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$. Wegen I 3), 1) gilt auch die Umkehrung, d. h. *die Relationen = und ∘ fallen zusammen.*

Definition 1. Ein Modul $\mathfrak{A}$ heißt *Vielfaches* von $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$ ist, er heißt *Teiler* von $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{B}$ wird. Offenbar ist der erste Fall identisch mit $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$, der zweite mit $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$. Bleibt das Gleichheitszeichen ausgeschlossen, so soll $\mathfrak{A}$ echtes Vielfaches bzw. echter Teiler genannt werden.

---

[18]) Diese Tatsache ist schon von Dedekind in der in [11]) erwähnten Arbeit ausgesprochen und benutzt.

[19]) Vgl. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, VI § 1. Leipzig 1914.

Dann besteht

Satz 3. $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \leqq \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$.

Beweis. $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, entsprechend für $\mathfrak{B}$.

Satz 4. $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} \geqq \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$.

Beweis. $(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) - \mathfrak{A} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, entsprechend für $\mathfrak{B}$.

Hieraus ergeben sich die üblichen, die Ordnungsbeziehungen beherrschenden Gesetze, also beispielsweise: Aus $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \parallel \mathfrak{B}$ folgt bzw. $\mathfrak{B} > \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \parallel \mathfrak{A}$, sowie etwa das transitive Gesetz: aus $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{C}$ folgt $\mathfrak{A} < \mathfrak{C}$, u. a. Der Beweis werde etwa für die Behauptung $\mathfrak{A} < \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B} > \mathfrak{A}$ geführt. Dazu ist also zu zeigen $\mathfrak{B} + \mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Aus $\mathfrak{B} + \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ schließt man $\mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, gegen die Voraussetzung. Aus $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ folgt ferner nach II 3) die Beziehung $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) - \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$. Ähnlich vollziehen sich die Beweise der übrigen Gesetze. Insbesondere also hat man: Ist $\mathfrak{A}$ Vielfaches von $\mathfrak{B}$, so wird $\mathfrak{B}$ Teiler von $\mathfrak{A}$, und umgekehrt. Deshalb sagt man auch im Fall $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$, daß $\mathfrak{A}$ *durch* $\mathfrak{B}$ *teilbar* ist, während das Gegenteil, die *Nichtteilbarkeit*, sich durch $\mathfrak{A} < \parallel \mathfrak{B}$ ausdrückt.

Definition 2. Ein Modul $\mathfrak{D}$ heißt *größter gemeinsamer Teiler* der Moduln $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, wenn 1. $\mathfrak{D}$ gemeinsamer Teiler von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist, 2. jeder gemeinsame Teiler von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Teiler von $\mathfrak{D}$ wird. Entsprechend kommt

Definition 3. Ein Modul $\mathfrak{V}$ heißt *kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches* der Moduln $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, wenn 1. $\mathfrak{V}$ gemeinschaftliches Vielfaches von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist, 2. jedes gemeinschaftliche Vielfache von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Vielfaches von $\mathfrak{V}$ wird. — Offenbar ist der größte gemeinsame Teiler ebenso wie das kleinste gemeinschaftliche Vielfache durch die beiden Moduln $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ eindeutig bestimmt. — Es besteht dann

Satz 5. *Der größte gemeinsame Teiler von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *ist* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$.

Beweis. Nach Satz 3 ist $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ gemeinsamer Teiler von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Für einen beliebigen gemeinsamen Teiler $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ kommt wegen $\mathfrak{A} + \mathfrak{C} = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \mathfrak{C}$ und I 2) die Beziehung $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A} + \mathfrak{C} = \mathfrak{C}$, also $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \geqq \mathfrak{C}$, w. z. b. w. Entsprechend hat man

Satz 6. *Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *ist* $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$.

Aus den beiden Sätzen ist zu schließen: Aus $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B} \geqq \mathfrak{D}$ folgt $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \geqq \mathfrak{C} + \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} \geqq \mathfrak{C} - \mathfrak{D}$. Und bezüglich der Multiplikation ergibt sich schließlich noch aus dem 2. distributiven Gesetz die Folgerung: Aus $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$ folgt $\mathfrak{A}\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Denn aus $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$ kommt $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}$.

Wie in der Mengenlehre heißen hier zwei Modulkörper ähnlich, wenn zwischen ihren Elementen eine eineindeutige Beziehung besteht derart, daß die in der einen Menge zwischen zwei Elementen bestehende Ordnungsrelation gleicherweise für die entsprechenden Elemente der andern gilt. — Aus der Definition der Ordnungsrelationen folgt sofort der

Satz 7. *Isomorphe Modulkörper sind ähnlich.*

Zuletzt soll noch die 4. Verknüpfung der Quotientenbildung unterworfen sein den Axiomen

IV. 1) $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) \geqq \mathfrak{A}$; 2) aus $\mathfrak{B}\,\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{A}$ folgt $\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$.

Dann beweist man

Satz 8. *Es ist* $\mathfrak{A}:(\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}:\mathfrak{B}):\mathfrak{C}$,

sowie

Satz 9. *Es ist* $\mathfrak{A}:(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) - (\mathfrak{A}:\mathfrak{C})$.

Der Beweis von Satz 8 ist derselbe wie in N. § 5, 4. Um Satz 9 zu beweisen, bemerkt man zunächst, daß aus $\mathfrak{B} \geqq \mathfrak{B}+\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{B}+\mathfrak{C}$ folgt $\mathfrak{A}:(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \geqq \mathfrak{A}:\mathfrak{B} - \mathfrak{A}:\mathfrak{C}$. Setzt man zum andern die rechte Seite gleich $\mathfrak{V}$, so kommt aus $\mathfrak{V} \geqq \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}:\mathfrak{C}$ weiter $\mathfrak{B}\,\mathfrak{V}$, $\mathfrak{C}\,\mathfrak{V} \geqq \mathfrak{A}$, nach Satz 5 also $\mathfrak{B}\,\mathfrak{V} + \mathfrak{C}\,\mathfrak{V} = (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\,\mathfrak{V} \geqq \mathfrak{A}$, somit $\mathfrak{V} \geqq \mathfrak{A}:(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})$, womit der Satz erledigt ist.

2. Vollständige Modulkörper. Ein Modulkörper heißt nach *oben* (*unten*) *vollständig*, wenn er zu *beliebig* vielen Elementen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ deren kleinstes gemeinschaftliches Vielfache (größten gemeinsamen Teiler) enthält. Diese beiden Elemente sollen dann mit $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} - \ldots$ bzw. $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \ldots$ bezeichnet werden. Ein nach oben und unten vollständiger Modulkörper wird einfach als vollständig bezeichnet.

Aus dem durch IV. eingeschränkten Quotientenbegriff läßt sich in nach oben vollständigen Modulkörpern die Gültigkeit des 3. distributiven Gesetzes für beliebig viele Elemente $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ nachweisen: $(\mathfrak{A} - \mathfrak{B} - \ldots):\mathfrak{C} = (\mathfrak{A}:\mathfrak{C}) - (\mathfrak{B}:\mathfrak{C}) - \ldots$.

Hingegen soll das 2. distributive Gesetz für beliebig viele Elemente in einem nach unten vollständigen Modulkörper als neues Axiom gefordert werden [19a]). Dann wird der Quotient $\mathfrak{A}:\mathfrak{B}$ der größte gemeinsame Teiler

[19a]) Das 2. distributive Gesetz für unendlich viele Elemente $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_2, \ldots$ läßt sich z. B. dann aus den vorhergehenden Axiomen folgern, wenn es sich um die in gewöhnlicher Weise aus den Elementen eines Ringes definierten Ideale handelt, oder dann, wenn wenigstens einmal der größte gemeinsame Teiler aller $\mathfrak{B}_\nu$ bis auf endlich viele selbst ein $\mathfrak{B}_\lambda$ ist. Ist nämlich etwa $\mathfrak{B}_n' = \mathfrak{B}_{n+1} + \ldots + \mathfrak{B}_{n+\mu} + \ldots = \mathfrak{B}_\lambda$, so hat man $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1 + \ldots + \mathfrak{B}_\nu + \ldots) = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 + \ldots + \mathfrak{A}\mathfrak{B}_n + \mathfrak{A}\mathfrak{B}_n' \leqq \mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 + \ldots + \mathfrak{A}\mathfrak{B}_\nu + \ldots \leqq \mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 + \ldots + \mathfrak{A}\mathfrak{B}_n + \mathfrak{A}\mathfrak{B}_\lambda = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1 + \ldots + \mathfrak{B}_\nu + \ldots)$, [also $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 + \ldots + \mathfrak{A}\mathfrak{B}_\nu + \ldots = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1 + \ldots + \mathfrak{B}_\nu + \ldots)$. Sonst aber versagt dieser Schluß, und das 2. distributive Gesetz für unendlich viele Elemente scheint unabhängig von den anderen Axiomen zu sein.

aller Ideale $\mathfrak{C}$, für die $\mathfrak{B}\,\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{A}$ wird. In vollständigen Modulkörpern mit diesem verschärften 2. distributiven Gesetz gilt schließlich Satz 9 für beliebig viele Elemente $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$.

Aus der Ähnlichkeit isomorpher Modulkörper ergibt sich zum Schluß noch die

Folgerung. *Zwei isomorphe Modulkörper sind gleichzeitig nach oben vollständig oder überhaupt nicht; im ersten Fall entspricht dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen beliebig vieler Moduln des einen das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der entsprechenden Moduln des andern.* — Eine analoge Behauptung gilt bei nach unten vollständigen Modulkörpern und für den größten gemeinsamen Teiler.

3. Idealkörper. Ein Modulkörper heißt *Idealkörper*, wenn es in ihm einen Modul $\mathfrak{o}$ von folgender Beschaffenheit gibt:

1. $\mathfrak{o}$ ist Teiler jedes Moduls des Modulkörpers,

2. für jeden Modul $\mathfrak{A}$ des Körpers wird $\mathfrak{A}\,\mathfrak{o} \geqq \mathfrak{A}$. Die Elemente des Modulkörpers heißen dann *Ideale* des Idealkörpers I und werden mit kleinen gothischen Buchstaben bezeichnet. $\mathfrak{o}$ heißt das *Einheitsideal* des Idealkörpers I.

Im Idealkörper gilt als wesentliche Tatsache, daß ein *Produkt durch jeden Faktor teilbar* ist, $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, denn man hat z. B. $\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{o}$ und daraus weiter $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{a}\,\mathfrak{o} \geqq \mathfrak{a}$.

Gibt es in einem Idealkörper I ein Ideal $\mathfrak{e}$, so daß $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{e} = \mathfrak{a}$ für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ aus I wird, so heißen die *Ideale* $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ *teilerfremd*, wenn ihr größter gemeinsamer Teiler gleich $\mathfrak{e}$ wird[20]). Falls ein solches Ideal $\mathfrak{e}$ in I überhaupt existiert, muß es notwendig mit $\mathfrak{o}$ übereinstimmen; denn man hat $\mathfrak{o}\,\mathfrak{e} = \mathfrak{o} \geqq \mathfrak{e}$, und da auch $\mathfrak{e} \geqq \mathfrak{o}$ gilt, kommt $\mathfrak{o} = \mathfrak{e}$. — Die in N. § 4, 4 gegebenen Regeln der teilerfremden Ideale lassen sich sämtlich für Idealkörper I herleiten.

Ein Ideal $\mathfrak{p}$ heißt *Primideal in* I, wenn aus $\mathfrak{a} < \!|\!| \,\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b} < \!|\!| \,\mathfrak{p}$ stets $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} < \!|\!| \,\mathfrak{p}$ folgt; ein Ideal $\mathfrak{q}$ heißt *Primärideal in* I, wenn aus $\mathfrak{a} < \!|\!| \,\mathfrak{q}$, $\mathfrak{b}^n < \!|\!| \,\mathfrak{q}$ (für jedes natürliche n) sich immer $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} < \!|\!| \,\mathfrak{q}$ ergibt[21]).

4. Ringe. Die in dieser Arbeit auftretenden Ringe werden ein für allemal als kommutativ vorausgesetzt. Von den Ringen P_ν eines Systems beliebiger Mächtigkeit $S: \mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots$ wird angenommen, daß sie einen gemeinschaftlichen Erweiterungsring Φ besitzen. Die in den einzelnen P_ν geltenden Gleichheits- und Verknüpfungsbeziehungen sollen mit denen von Φ übereinstimmen. Im übrigen sei auf Fußnote 6 zu N. § 1 verwiesen.

[20]) Diese Definition der Teilerfremdheit gibt W. Krull in der in [11]) erwähnten Note.

[21]) Auf die Existenz eines zugehörigen Primideals läßt sich im allgemeinen nicht schließen, vgl. dazu 6.

5. Quotientenringe sind — ähnlich wie die Quotientenkörper bei Steinitz[22]) — so definiert: Im Ring P sei G eine nicht leere Menge regulärer[23]) Elemente, die neben zwei a, b auch ihr Produkt ab enthält. Dann entsteht der Quotientenring $\frac{\mathsf{P}}{G}$ aus P durch Hinzunahme aller Quotienten $\frac{\varrho}{a}$. Dabei ist ϱ beliebiges Element aus P, a beliebiges aus G. Die Gleichheit in $\frac{\mathsf{P}}{G}$ sei folgendermaßen festgesetzt: Für zwei Elemente aus P gelten unverändert die alten Beziehungen; zwei Elemente ϱ, $\frac{\sigma}{a}$ aus P, $\frac{\mathsf{P}}{G}$ heißen gleich, wenn $a \cdot \varrho = \sigma$ in P wird; ebenso $\frac{\sigma_1}{a_1}$ und $\frac{\sigma_2}{a_2}$, wenn $\sigma_1 a_2 = \sigma_2 a_1$ in P besteht. Die Verknüpfungen zwischen den Elementen von P bleiben ungeändert; für ein ϱ aus P und ein $\frac{\sigma}{a}$ aus $\frac{\mathsf{P}}{G}$ soll sein $\varrho \pm \frac{\sigma}{a} = \frac{\varrho a \pm \sigma}{a}$, $\varrho \cdot \frac{\sigma}{a} = \frac{\varrho\,\sigma}{a}$; entsprechend gelte $\frac{\sigma_1}{a_1} \pm \frac{\sigma_2}{a_2} = \frac{\sigma_1 a_2 \pm \sigma_2 a_1}{a_1 a_2}$, $\frac{\sigma_1}{a_1} \cdot \frac{\sigma_2}{a_2} = \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{a_1 \cdot a_2}$. Man bestätigt die Gültigkeit der üblichen Ringaxiome; denn diese sind in P zutreffend. — *Jeder Quotientenring besitzt ein Einheitselement*; für beliebiges a aus G ist nämlich bei beliebigem τ aus $\frac{\mathsf{P}}{G}$ stets $\tau \cdot \frac{a}{a} = \frac{\tau a}{a} = \tau$ erfüllt.

6. Moduln und Ideale in Ringen. Moduln treten im folgenden nur als Untersysteme eines Ringes Σ auf, doch ist ihr Multiplikatorenbereich Γ nicht immer — wie in N. — ein Unterring von Σ. Das Produkt eines Elementes c aus Γ und eines σ aus Σ sei definiert als Element $c \cdot \sigma$ aus Σ; dabei gelte noch $c(\sigma_1 + \sigma_2) = c\,\sigma_1 + c\,\sigma_2$. Dann ist ein Γ = Modul in Σ definiert als System von Elementen, das neben zweien auch deren Differenz und neben einem Element μ auch $c \cdot \mu$ bei beliebigem c aus Γ enthält. Wird Γ mit Σ identisch, so spricht man von Idealen in Σ.

Bezüglich des Teilbarkeitsbegriffs sowie der Bildung der Summe (des größten gemeinsamen Teilers), der Differenz (des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen) und Produktes kann auf N. § 1, 1, hinsichtlich des Quotienten auf N. § 5, 4 verwiesen werden[24]). Man bestätigt nun z. B.,

---

[22]) E. Steinitz, Algebr. Theorie der Körper, § 3; Journal f. Math. **137** (1910).

[23]) Ein Element heißt regulär, wenn es nicht Nullteiler ist. Soll die Gleichheit in $\frac{\mathsf{P}}{G}$ die üblichen Gesetze erfüllen, so ist die Beschränkung auf *reguläre* Elemente als Nenner unbedingt notwendig. Beweis: Sei a_1 aus G nicht regulär, dann gibt es ein $a_2 \neq 0$ aus P, so daß $a_1 \cdot a_2 = 0$ wird. Man hätte dann bei Annahme der üblichen Gleichheitsbedingungen $a_2 = \frac{0}{a_1} = 0$, also $a_2 = 0$, im Widerspruch zu $a_2 \neq 0$.

[24]) Insbesondere also heißt $\mathfrak{A}$ echtes Vielfaches von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ echter Teiler von $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{B}$ alle Elemente von $\mathfrak{A}$ enthält und wenigstens ein Element von $\mathfrak{B}$ nicht in $\mathfrak{A}$ liegt. Hinsichtlich der scheinbar paradoxen Ausdrucksweise und Bezeichnung vgl. Z. IV § 169.

daß das System C aller Γ-Moduln aus Σ einen vollständigen Modulkörper[25]) mit den Axiomen aus 1. bildet. Für Einzelheiten der Beweisführung sei auf Z. IV §§ 169, 170 verwiesen; die dort gegebenen Beweise gelten ohne weiteres auch für allgemeine Γ-Moduln. Ebenso bildet das System I aller Ideale eines Ringes einen vollständigen Idealkörper, in dem alle Axiome aus 1., insbesondere das verschärfte 2. distributive Gesetz, erfüllt sind.

Die im Körper aller Ideale eines Ringes Σ bestehenden Grundtatsachen über Prim- und Primärideale finden sich in N. § 5, 1—3. Die in N. § 5, 2 angewandten Schlüsse über die Existenz eines zugehörigen Primideals versagen aber im allgemeinen schon in beliebigen Körpern B von Idealen aus Σ. Selbst wenn B als nach unten vollständig vorausgesetzt und der größte gemeinsame Teiler $\mathfrak{d}$ aller „Nullteiler"ideale[26]) in Elemente aufgelöst wird, kann man nicht schließen, daß $\mathfrak{d}$ in B Primideal ist. Es gilt nämlich nicht mehr notwendig wie im Körper I aller Ideale eines Ringes: Ist ein Produkt von Elementen aus Σ Element eines „Nullteiler"ideals in I, so ist auch wenigstens ein Faktor Element eines „Nullteiler"ideals.

§ 2.

Gruppentheoretisches.

1. Modulgruppen[27]). In einer Modulgruppe M sei $\mathfrak{M}$ ein Modul, $\mathfrak{E}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{M}$. Ferner werde $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{E} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$. $\mathfrak{C}$ sei ein Modul aus M mit $\mathfrak{E} \geqq \mathfrak{C} \geqq \mathfrak{M}$.

Definition 1. Die zu $\mathfrak{A}$ gehörige *Summenkomponente* $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{C}$ ist definiert durch $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{C} + \mathfrak{B}) - \mathfrak{A}$; entsprechend kommt $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{C} + \mathfrak{A}) - \mathfrak{B}$.

Definition 2. Die zu $\mathfrak{A}$ gehörige *Durchschnittskomponente* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{C}$ ist definiert durch $\mathfrak{C}^{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}) + \mathfrak{A}$; entsprechend kommt $\mathfrak{C}^{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) + \mathfrak{B}$.

Es gelten die beiden Aussagen

Satz 1. $\mathfrak{C} + \mathfrak{A} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}} + \mathfrak{A}$.

Satz 2. $\mathfrak{C} - \mathfrak{A} = \mathfrak{C}^{\mathfrak{B}} - \mathfrak{A}$.

Entsprechende Behauptungen bestehen für $\mathfrak{B}$.

---

[25]) C ist also insbesondere Modulgruppe.

[26]) Als Nullteilerideale sind hier solche Ideale $\mathfrak{a}$ aus B bezeichnet, für die in B ein $\mathfrak{b} < || \mathfrak{q}$ existiert, so daß $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{q}$ wird; sie sind also identisch mit denjenigen, von denen eine endliche Potenz Vielfaches von $\mathfrak{q}$ ist; hierbei wird natürlich immer $\mathfrak{q} \succ \mathfrak{o}$ vorausgesetzt.

[27]) Vgl. Fußnote [17]). Die Tatsachen von 1. verdanke ich einer Vorlesung, die hier gegebenen einfachen Beweise einem Manuskript von E. Noether. Entsprechend dem Zweck dieser Arbeit werden nur endlich viele Komponenten in Betracht gezogen.

Beweis von Satz 1. Nach dem 1. distributiven Gesetz kommt $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}+\mathfrak{A} = ((\mathfrak{C}+\mathfrak{A})-\mathfrak{B})+\mathfrak{A} = (\mathfrak{C}+\mathfrak{A})-(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}) = \mathfrak{C}+\mathfrak{A}$, wegen $\mathfrak{B}+\mathfrak{A}=\mathfrak{M}$. — Der Beweis von Satz 2 ergibt sich durch Vertauschung der Operationen $+$ und $-$.

$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ seien endlich viele Moduln, die sämtlich echte Vielfache von $\mathfrak{M}$ und echte Teiler von $\mathfrak{E}$ sind. Für jedes i sei gesetzt $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_{i-1} + \mathfrak{A}_{i+1} + \ldots + \mathfrak{A}_n$.

Definition 3. $\mathfrak{M}$ heißt *direkte Summe* von $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ bez. $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \mathfrak{A}_n$, wenn $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_n$ und (für jedes i) $\mathfrak{A}_i - \mathfrak{B}_i = \mathfrak{E}$ wird.

Entsprechend seien $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$ endlich viele Moduln, die echte Teiler von $\mathfrak{E}$ und echte Vielfache von $\mathfrak{M}$ sind. Für jedes i sei gesetzt $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{C}_1 - \ldots - \mathfrak{C}_{i-1} - \mathfrak{C}_{i+1} - \ldots - \mathfrak{C}_n$.

Definition 4. $\mathfrak{E}$ heißt *direkter Durchschnitt* von $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$ bez. $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{E} = \mathfrak{C}_1 \dot{-} \ldots \dot{-} \mathfrak{C}_n$, wenn $\mathfrak{E} = \mathfrak{C}_1 - \ldots - \mathfrak{C}_n$ und (für jedes i) $\mathfrak{C}_i + \mathfrak{D}_i = \mathfrak{M}$ wird.

$\mathfrak{G}$ sei ein Modul, der Vielfaches von $\mathfrak{M}$ und Teiler von $\mathfrak{E}$ ist. Wie vorhin sei $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \mathfrak{A}_n$ direkte Summe bez. $\mathfrak{E}$. Dann besteht der

Satz 3. $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_1} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_n} = (\mathfrak{G}+\mathfrak{B}_1) - \ldots - (\mathfrak{G}+\mathfrak{B}_n)$.

Und ist entsprechend $\mathfrak{H}$ ein Modul, der Teiler von $\mathfrak{E}$ und Vielfaches von $\mathfrak{M}$ ist, sowie $\mathfrak{E} = \mathfrak{C}_1 \dot{-} \ldots \dot{-} \mathfrak{C}_n$ direkter Durchschnitt bez. $\mathfrak{M}$, so hat man

Satz 4. $\mathfrak{H}^{\mathfrak{C}_1} - \ldots - \mathfrak{H}^{\mathfrak{C}_n} = (\mathfrak{H}-\mathfrak{D}_1) + \ldots + (\mathfrak{H}-\mathfrak{D}_n)$.

Bewiesen wird nur Satz 3. Satz 4, von dem übrigens in dieser Arbeit kein Gebrauch gemacht wird, erledigt sich durch Vertauschung der Operationen. — Zum Beweis von Satz 3 dient der

Hilfssatz. Setzt man für beliebiges i $\mathfrak{F}_i = (\mathfrak{G}-\mathfrak{B}_1) - \ldots - (\mathfrak{G}+\mathfrak{B}_i)$, so kommt

$$((\mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_i) - \mathfrak{F}_i) + \mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_{i+1}} = (\mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_{i+1}) - \mathfrak{F}_{i+1}.$$

Beweis. Man hat $\mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_i \geqq \mathfrak{G} + \mathfrak{B}_{i+1}$ und $\mathfrak{A}_{i+1} \geqq \mathfrak{F}_i$, also nach dem 1. distributiven Gesetz

$$((\mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_i) - \mathfrak{F}_i) + ((\mathfrak{G}+\mathfrak{B}_{i+1}) - \mathfrak{A}_{i+1})$$
$$= (((\mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_i) - \mathfrak{F}_i) + \mathfrak{A}_{i+1}) - (\mathfrak{G}+\mathfrak{B}_{i+1}) = (\mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_{i+1}) - \mathfrak{F}_{i+1}.$$

Nunmehr ergibt sich Satz 3 mittels Induktion. Man hat $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_1} = \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{F}_1$. Durch n-malige Wiederholung kommt nach dem Hilfssatz

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_1} + \ldots + \mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_n} = (\mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_n) - \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_n = (\mathfrak{G}+\mathfrak{B}_1) - \ldots - (\mathfrak{G}+\mathfrak{B}_n),$$

w. z. b. w.

Der bisherige *Dualismus zwischen direkter Summe und direktem Durchschnitt* findet seinen stärksten Ausdruck in den nachstehenden Behauptungen.

Satz 5. *Sei* $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_n$ *direkte Summe der* $\mathfrak{A}_i$ *bez.* $\mathfrak{E}$ *und* $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_{i-1} + \mathfrak{A}_{i+1} + \ldots + \mathfrak{A}_n$. *Dann wird* $\mathfrak{B}_1 - \ldots - \mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_{i+1} + \ldots + \mathfrak{A}_n$ *für jeden Index* i. *Insbesondere also folgt aus der Darstellung von* $\mathfrak{M}$, *daß* $\mathfrak{E} = \mathfrak{B}_1 \dot{-} \ldots \dot{-} \mathfrak{B}_n$ *direkter Durchschnitt der* $\mathfrak{B}_i$ *bez.* $\mathfrak{M}$ *wird.*

Und es gilt der duale

Satz 6. *Sei* $\mathfrak{E} = \mathfrak{C}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{C}_n$ *direkter Durchschnitt der* $\mathfrak{C}_i$ *bez.* $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{C}_1 - \ldots - \mathfrak{C}_{i-1} - \mathfrak{C}_{i+1} - \ldots - \mathfrak{C}_n$. *Dann wird* $\mathfrak{D}_1 + \ldots + \mathfrak{D}_i = \mathfrak{C}_{i+1} - \ldots - \mathfrak{C}_n$ *für jeden Index* i. *Insbesondere also folgt aus der Darstellung von* $\mathfrak{E}$, *daß* $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \mathfrak{D}_n$ *direkte Summe der* $\mathfrak{D}_i$ *bez.* $\mathfrak{E}$ *wird.*

Nur für Satz 5 wird ein Beweis gegeben, der für Satz 6 läuft entsprechend.

Beweis von Satz 5. Sei gesetzt $\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 - \ldots - \mathfrak{B}_i$. Dann ist $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{A}_{i+\lambda} \geqq \mathfrak{G}$ für $\lambda \geqq 1$. Man hat

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_1} = (\mathfrak{G} + \mathfrak{B}_1) - \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{E}; \ \ldots;$$

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_i} = (\mathfrak{G} + \mathfrak{B}_i) - \mathfrak{A}_i = \mathfrak{B}_i - \mathfrak{A}_i = \mathfrak{E}.$$

Hingegen wird

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_{i+1}} = (\mathfrak{G} + \mathfrak{B}_{i+1}) - \mathfrak{A}_{i+1} = \mathfrak{A}_{i+1}; \ \ldots; \ \mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_n} = \mathfrak{A}_n.$$

Also kommt wegen $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_{i+\lambda} + \mathfrak{B}_{i+\lambda} \geqq \mathfrak{G} + \mathfrak{B}_{i+\lambda} \geqq \mathfrak{M}$ nach Satz 3

$$\mathfrak{B}_1 - \ldots - \mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_{i+1} + \ldots + \mathfrak{A}_n, \text{ w. z. b. w.}$$

Beim Nachweis des direkten Durchschnitts zeigt man leicht, daß die $\mathfrak{B}_i$ von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ verschieden sind; dasselbe gilt für die $\mathfrak{D}_i$ beim Nachweis der direkten Summe.

Im Anschluß an Satz 5 ergibt sich die

Folgerung 1. *Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von* s *Komponenten* $(s < n)$ $\mathfrak{B}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{B}_{i_s}$ *aus der Reihe* $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ *ist gleich dem größten gemeinsamen Teiler der von* $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_s}$ *verschiedenen Komponenten* $\mathfrak{A}_j$ *der Reihe* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$.

Beweis. Man numeriert die Komponenten $\mathfrak{B}_j, \mathfrak{A}_j$ geeignet um und wendet Satz 5 an. — Entsprechend hat man im Anschluß an Satz 6 die

Folgerung 2. *Der größte gemeinsame Teiler von* s *Komponenten* $(s < n)$ $\mathfrak{D}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{D}_{i_s}$ *aus der Reihe* $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_n$ *ist gleich dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der von* $\mathfrak{C}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{C}_{i_s}$ *verschiedenen Komponenten* $\mathfrak{C}_j$ *der Reihe* $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$.

Zuletzt ergibt sich noch bezüglich Satz 3 die

Folgerung 3. *Setzt man* $\mathfrak{C} = \mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_1} + \ldots + \mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_n}$ *und streicht in dieser Darstellung alle mit* $\mathfrak{E}$ *identischen Komponenten, so wird* $\mathfrak{C}$, *falls mindestens zwei Komponenten verbleiben, direkte Summe dieser Komponenten bez.* $\mathfrak{E}$. — Entsprechendes gilt bez. des direkten Durchschnitts, wenn in $\mathfrak{C} = (\mathfrak{G} + \mathfrak{B}_1) - \ldots - (\mathfrak{G} + \mathfrak{B}_n)$ alle mit $\mathfrak{M}$ identischen Komponenten fortgelassen werden.

Beweis. Aus $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_i} \geqq \mathfrak{A}_i$ folgt, daß das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_i}$ und der Summe der übrigen Komponenten in der $\mathfrak{C}$-Darstellung gleich $\mathfrak{E}$ wird. Wäre ferner etwa $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_1} = \mathfrak{C}$, so hätte man, falls $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_2}$ wirklich auftritt,

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_2} \geqq \mathfrak{C} - \mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_1} \geqq \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_2} \geqq \mathfrak{A}_2 \geqq \mathfrak{B}_1,$$

somit gegen die Voraussetzung $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}_2} \geqq \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{E}$.

2. Restklassenbildung und Isomorphiesätze. Wie in § 1, 6 werden Moduln und Ideale aus Ringelementen betrachtet. Die Begriffe des Modul- und Ringisomorphismus finden sich in N. § 4, Abschnitt 1 und 3; dort ist auch die Bildung von Restklassenmodul und Restklassenring beschrieben[28]). Einen *Zusammenhang zwischen arithmetischem und Ringisomorphismus* gibt der in § 7 zur Anwendung gelangende

Satz 7. I_1, I_2 *seien zwei Idealkörper mit Idealen aus Ringen* $\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2$; $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2$ *seien die Einheitsideale von* I_1, I_2. *Zwischen den Elementen von* I_1, I_2 *bestehe eine eineindeutige Zuordnung von folgender Beschaffenheit:*

1. *einander entsprechende Ideale* $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ *aus* I_1, I_2 *besitzen ringisomorphe Restklassenringe* $\mathfrak{o}_1 | \mathfrak{m}_1$ *und* $\mathfrak{o}_2 | \mathfrak{m}_2$;

2. *sind* $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ *Teiler von* $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ *und die Ideale* $\mathfrak{d}_1 | \mathfrak{m}_1, \mathfrak{d}_2 | \mathfrak{m}_2$ *durch die Ringisomorphie* $\mathfrak{o}_1 | \mathfrak{m}_1 \simeq \mathfrak{o}_2 | \mathfrak{m}_2$ *einander zugeordnet, so entsprechen sich* $\mathfrak{d}_1$ *und* $\mathfrak{d}_2$ *in der Abbildung der beiden Idealkörper.*

Dann sind I_1 *und* I_2 *arithmetisch isomorph.*

Beweis. $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$ seien zwei Ideale aus I_1; die ihnen in I_2 entsprechenden seien $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2$. In I_1 sei $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{m}_1$, und das $\mathfrak{m}_1$ in I_2 zugeordnete Ideal sei $\mathfrak{m}_2$. Zum Nachweis der Behauptung genügt dann die Betrachtung der beiden Restklassenringe $\mathfrak{o}_1 | \mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{o}_2 | \mathfrak{m}_2$, in denen sich sämtliche vier Verknüpfungen der Ideale $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2$ verfolgen lassen. Es soll dies z. B. für das Produkt durchgeführt werden; für die anderen Operationen verläuft der Beweis noch einfacher. Die $\mathfrak{a}_1 | \mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{b}_1 | \mathfrak{m}_1$ in $\mathfrak{o}_2 | \mathfrak{m}_2$ entsprechenden Ideale sind gleich $\mathfrak{a}_2 | \mathfrak{m}_2$ und $\mathfrak{b}_2 | \mathfrak{m}_2$. Da das Produkt der

[28]) Der bei der Restklassenbildung auftretende, durch $\equiv$ bezeichnete Kongruenzbegriff bezieht sich auf *Elemente* (eines Ringes oder allgemeineren Modulbereichs) und wird demgemäß in dieser Arbeit nur bei diesen verwandt.

beiden ersten in $\mathfrak{o}_1 \mid \mathfrak{m}_1$ das Nullideal ergibt, wird $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 \geqq \mathfrak{m}_2$. Es kann aber nicht $\bar{\mathfrak{m}}_2 = \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 > \mathfrak{m}_2$ sein; denn sonst bestünde für das $\bar{\mathfrak{m}}_2$ in I_1 entsprechende Ideal $\bar{\mathfrak{m}}_1$ die Beziehung $\bar{\mathfrak{m}}_1 > \mathfrak{m}_1$, also weiter $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \geqq \bar{\mathfrak{m}}_1 > \mathfrak{m}_1$.

Die beiden *Isomorphiesätze der Modul- und Idealtheorie* finden sich in N. § 4, Abschnitt 2 und 3. Der II. Isomorphiesatz wird in dieser Arbeit in zwei Fassungen verwandt, die etwas weiter als die dort angegebenen sind.

1. *Für zwei beliebige Moduln* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *bestehen die Modulisomorphismen* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$.

2. *Ist* $\mathfrak{B}$ *ein im Multiplikatorenbereich* Γ *der Moduln* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *gelegener Ring, so gelten die Ringisomorphien* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$.

Zum Beweis der zweiten Fassung ist lediglich zu zeigen, daß die auftretenden Restklassensysteme wirklich Ringe sind; dann verläuft der Beweis weiter genau wie für 1. Als Produkt der Klassen (β) und (γ) aus $\mathfrak{B} \mid \mathfrak{A}$ sei definiert $(\beta\gamma)$. Diese Definition ist eindeutig. Sei nämlich $(\beta_1) = (\beta)$, $(\gamma_1) = (\gamma)$, also $\beta = \beta_1 + \alpha$, $\gamma = \gamma_1 + \delta$ mit $\alpha, \delta \equiv 0\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$. Dann wird $\beta\gamma = \beta_1\gamma_1 + \alpha\gamma_1 + \delta\beta_1 + \alpha\delta \equiv \beta_1\gamma_1\,(\mathfrak{A})$.

Daß die üblichen Axiome erfüllt sind, ist klar.

Die in den beiden Isomorphiesätzen auftretenden Isomorphien haben die Besonderheit, daß *einander zugeordnete Klassen durch dieselben Elemente aus* $\mathfrak{M}$ *bzw.* $\mathfrak{B}$ *repräsentiert* werden können. Das folgt beim II. Isomorphiesatz ohne weiteres daraus, daß beim Homomorphismus $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A}$ dem Element β aus $\mathfrak{B}$ die Klasse (β) aus $\mathfrak{B} \mid \mathfrak{A}$ zugeordnet wird (vgl. N. § 4, 1 und 2). Diese Eigentümlichkeit des Isomorphismus, die durch das Zeichen $\simeq$ hervorgehoben ist, erlaubt es, die nachstehenden Behauptungen auszusprechen[29]).

Satz 8. $\mathfrak{C}$ *sei ein Modul mit* $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{C} \geqq \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$. *Wird durch den Isomorphismus* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ *dem Modul* $\mathfrak{C} \mid \mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ *der Modul* $\mathfrak{C}' \mid \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ *mit* $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} \geqq \mathfrak{C}' \geqq \mathfrak{B}$ *zugeordnet, so ist* $\mathfrak{C}'$ *die zu* $\mathfrak{B}$ *gehörige Summenkomponente* $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{C} + \mathfrak{A}) - \mathfrak{B} = \mathfrak{C} - \mathfrak{B}$.

Beweis. $\mathfrak{C}' \mid \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ besteht aus der Gesamtheit der Klassen von $\mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, die sich durch Elemente aus $\mathfrak{C}$ repräsentieren lassen, also $\mathfrak{C}'$ aus der Gesamtheit der in $\mathfrak{B}$ enthaltenen Elemente von $\mathfrak{C}$.

Entsprechend besteht

Satz 9. $\mathfrak{D}$ *sei ein Modul mit* $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{D} \leqq \mathfrak{B} - \mathfrak{A}$. *Wird durch den Isomorphismus* $\mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} - \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A}$ *dem Modul* $\mathfrak{D} \mid \mathfrak{B} - \mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A}$ *der Modul* $\mathfrak{D}' \mid \mathfrak{A}$ *mit* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \leqq \mathfrak{D}' \leqq \mathfrak{A}$ *zugeordnet, so ist* $\mathfrak{D}'$ *die zu* $\mathfrak{A}$ *gehörige Durchschnittskomponente* $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}^{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{D} - \mathfrak{B}) + \mathfrak{A} = \mathfrak{D} + \mathfrak{A}$.

Der Beweis verläuft analog.

---

[29]) Vgl. hier S. 393 der in [11]) zitierten Dedekindschen Arbeit.

Die beiden Sätze ergeben in ihrer Kombination eine

Anwendung bei gekoppelten Isomorphien. Hat man nämlich für drei Moduln $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}$ die Beziehung $\mathfrak{A}' - \mathfrak{B} = \mathfrak{A}'' - \mathfrak{B}$, so ist zunächst nach dem II. Isomorphiesatz $\mathfrak{A}' + \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A}' \sim \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A}' - \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A}'' - \mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}'' + \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A}''$. $\mathfrak{C}'$ bezeichne einen Modul mit $\mathfrak{A}' \geqq \mathfrak{C}' \geqq \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}$. Wird dann durch diesen Isomorphismus dem Modul $\mathfrak{C}' \mid \mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{A}'' + \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A}''$ der Modul $\mathfrak{C}'' \mid \mathfrak{A}''$ mit $\mathfrak{A}'' + \mathfrak{B} \leqq \mathfrak{C}'' \leqq \mathfrak{A}''$ zugeordnet, so ist $\mathfrak{C}''$ die zu $\mathfrak{A}''$ gehörige Durchschnittskomponente von $\mathfrak{C}'_{\mathfrak{B}}$, $\mathfrak{C}'' = [\mathfrak{C}'_{\mathfrak{B}}]^{\mathfrak{A}''}$. Denn $\mathfrak{C}'' \mid \mathfrak{A}''$ wird erhalten, wenn man zuerst den $\mathfrak{C}' \mid \mathfrak{A}'$ zugeordneten Modul $\mathfrak{C}'_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B} \mid \mathfrak{A}' - \mathfrak{B}$ aufsucht und dann von hier zu $[\mathfrak{C}'_{\mathfrak{B}}]^{\mathfrak{A}''} \mid \mathfrak{A}''$ in $\mathfrak{A}'' + \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A}''$ übergeht.

Als Kombination der Begriffe und Sätze unter 1 mit dem II. Isomorphiesatz tritt der in N. § 4, 5 gegebene Zusammenhang zwischen der Darstellung eines Ideals durch paarweise teilerfremde Komponenten und der additiven Zerfällung seines Restklassenringes auf. — Wie schließlich leicht einzusehen, ist der Umstand, daß ein Modul $\mathfrak{M}$ direkte Summe der Komponenten $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ bez. $\mathfrak{E}$ wird, damit identisch, daß sich im Restklassenmodul $\mathfrak{M} \mid \mathfrak{E}$ jede Klasse (μ) eindeutig darstellen läßt in der Form $(\mu) = (\alpha_1) + \ldots + (\alpha_n)$, wobei (α_i) Element von $\mathfrak{A}_i \mid \mathfrak{E}$ ist.

§ 3.

Beziehungen zwischen Idealen von Ober- und Unterring.

Um die Beziehungen der Ideale eines Systems von Ringen zu beherrschen, ist es vor allem erforderlich, diejenigen zwischen den Idealen eines Ringes Σ und denen eines willkürlichen Unterringes P zu kennen. Die allgemeine Frage läßt sich auf dieses Problem weitgehend zurückführen.

1. Definition und Existenz der Erweiterungs- und Verengungsideale.

Definition 1. Das zu einem Ideal $\mathfrak{m}$ aus P gehörige *Erweiterungsideal* $\mathfrak{M}$ in Σ ist definiert als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches aller Ideale aus Σ, die als P-Moduln Teiler von $\mathfrak{m}$ sind.

Zu jedem $\mathfrak{m}$ aus P existiert das zugehörige $\mathfrak{M}$, da Σ selbst ein Ideal und sicher Modulteiler von $\mathfrak{m}$ ist.

Definition 2. Das zu einem Ideal $\mathfrak{N}$ aus Σ gehörige *Verengungsideal* $\mathfrak{n}$ in P ist definiert als größter gemeinsamer Teiler aller Ideale aus P, die als P-Moduln Vielfache von $\mathfrak{N}$ sind.

Zu jedem $\mathfrak{N}$ aus Σ existiert das zugehörige $\mathfrak{n}$, da das Nullideal aus P Vielfaches von $\mathfrak{N}$ ist

Man sagt, daß $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{n}$ durch $\mathfrak{m}$ bzw. $\mathfrak{N}$ erzeugt wird. Die Ver-

engungsideale $\mathfrak{n}$ in P und die Erweiterungsideale $\mathfrak{M}$ in Σ werden gemeinschaftlich als *ausgezeichnete Ideale* bezeichnet.

2. Die Struktur der ausgezeichneten Ideale. Das durch $\mathfrak{N}$ erzeugte Verengungsideal $\mathfrak{n}$ ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $\mathfrak{N} - \mathsf{P}$ der P-Moduln $\mathfrak{N}$ und P. Denn es muß $\mathfrak{n}$ Vielfaches von $\mathfrak{N}$ und P, also von $\mathfrak{N} - \mathsf{P}$ sein. Zum andern aber ist $\mathfrak{N} - \mathsf{P}$ Ideal in P und durch $\mathfrak{N}$ teilbar, $\mathfrak{N} - \mathsf{P} \geqq \mathfrak{n}$, also $\mathfrak{n} = \mathfrak{N} - \mathsf{P}$. $\mathfrak{n}$ ist der mengentheoretische Durchschnitt $[\mathfrak{N}, \mathsf{P}]$ von $\mathfrak{N}$ und P.

Das durch $\mathfrak{m}$ erzeugte Erweiterungsideal $\mathfrak{M}$ ist der größte gemeinsame Teiler $\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\Sigma$ der P-Moduln $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}\Sigma$. Denn es muß $\mathfrak{M}$ Teiler von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}\Sigma$, also von $\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\Sigma$ sein. Weiter aber ist wegen $(\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\Sigma)\Sigma = \mathfrak{m}\Sigma + \mathfrak{m}\Sigma^2 \geqq \mathfrak{m} + \mathfrak{m}\Sigma$ der Modul $\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\Sigma$ Ideal in Σ und Teiler von $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{M} \geqq \mathfrak{m} + \mathfrak{m}\Sigma$, also $\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\Sigma = \mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ besteht aus der Gesamtheit der Elemente $\mu + \mu_1\sigma_1 + \ldots + \mu_r\sigma_r$, wo $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_r$ alle Elemente aus $\mathfrak{m}$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ alle aus Σ durchläuft. — Enthält Σ ein Einheitselement e, so wird $\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{m}\Sigma$, also dann $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}\Sigma = \mathfrak{m}\Sigma$.

3. Eigenschaften der ausgezeichneten Ideale gegenüber Verknüpfungen. Bezüglich der Bildung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen und größten gemeinsamen Teilers beliebig vieler, sowie des Produktes zweier Ideale gelten die nachstehenden Sätze.

Satz 1. *Der größte gemeinsame Teiler* $\mathfrak{D} = \mathfrak{M}_1 + \ldots + \mathfrak{M}_\nu + \ldots$ *der Erweiterungsideale* $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_\nu, \ldots$ *mit den erzeugenden Idealen* $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\nu, \ldots$ *ist wieder Erweiterungsideal und kann durch* $\mathfrak{d} = \mathfrak{m}_1 + \ldots + \mathfrak{m}_\nu + \ldots$ *erzeugt werden.*

Satz 2. *Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache* $\mathfrak{v} = \mathfrak{n}_1 - \ldots - \mathfrak{n}_\nu - \ldots$ *der Verengungsideale* $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\nu, \ldots$ *mit den erzeugenden Idealen* $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\nu, \ldots$ *ist wieder Verengungsideal und kann durch* $\mathfrak{V} = \mathfrak{N}_1 - \ldots - \mathfrak{N}_\nu - \ldots$ *erzeugt werden.*

Beweis von Satz 1. Es ist $\mathfrak{M}_\nu = \mathfrak{m}_\nu + \mathfrak{m}_\nu\Sigma$, also $\mathfrak{D} = \mathfrak{M}_1 + \ldots + \mathfrak{M}_\nu + \ldots = (\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_1\Sigma) + \ldots + (\mathfrak{m}_\nu + \mathfrak{m}_\nu\Sigma) + \ldots = (\mathfrak{m}_1 + \ldots + \mathfrak{m}_\nu + \ldots) + (\mathfrak{m}_1\Sigma + \ldots + \mathfrak{m}_\nu\Sigma + \ldots) = \mathfrak{d} + \mathfrak{d}\Sigma$.

Beweis von Satz 2. Es ist $\mathfrak{n}_\nu = \mathfrak{N}_\nu - \mathsf{P}$, also $\mathfrak{v} = (\mathfrak{N}_1 - \mathsf{P}) - \ldots - (\mathfrak{N}_\nu - \mathsf{P}) - \ldots = (\mathfrak{N}_1 - \ldots - \mathfrak{N}_\nu - \ldots) - \mathsf{P}$.

Weiter bestätigt man ähnlich wie Satz 1 den

Satz 3. *Das Produkt zweier Erweiterungsideale* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ *mit den erzeugenden Idealen* $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ *ist wieder Erweiterungsideal und durch* $\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2$ *zu erzeugen.*

Ein hierzu dualer, die Quotientenbildung betreffender Satz kann erst in § 4 bewiesen werden.

4. Für Verengungsideale besteht noch der

Satz 4. *Ist das Ideal* $\mathfrak{Q}$ *in* Σ *starkes bzw. schwaches Primärideal mit* $\mathfrak{P}$ *als zugehörigem Primideal, so ist in* P *das Verengungsideal* $\mathfrak{Q} - \mathsf{P} = \mathfrak{q}$ *starkes bzw. schwaches Primärideal mit dem zu* $\mathfrak{P}$ *gehörigen Verengungsideal* $\mathfrak{P} - \mathsf{P} = \mathfrak{p}$ *als zugehörigem Primideal. Der (endliche oder unendliche) Exponent von* $\mathfrak{q}$ *ist nicht größer als der von* $\mathfrak{Q}$ (vgl. hierzu N. § 5).

Beweis. Nach dem II. Isomorphiesatz in der auf Ringe bez. Fassung (§ 2, 2) hat man $\mathsf{P}\,|\,\mathfrak{q} = \mathsf{P}\,|\,\mathsf{P} - \mathfrak{Q} \cong \mathsf{P}\,|\,\mathfrak{Q} \neq \Sigma\,|\,\mathfrak{Q}$ [30]), d. h. $\mathsf{P}\,|\,\mathfrak{q}$ ist einem Unterring von $\Sigma\,|\,\mathfrak{Q}$ isomorph. Entsprechend wird $\mathsf{P}\,|\,\mathfrak{p}$ isomorph einem Unterring von $\Sigma\,|\,\mathfrak{P}$. Daraus aber folgt sofort, daß mit $\mathfrak{P}$ in Σ auch $\mathfrak{p}$ in P Primideal, mit $\mathfrak{Q}$ in Σ auch $\mathfrak{q}$ in P schwaches Primärideal wird. Ferner ergibt sich $\mathfrak{p}$ als Gesamtheit der Repräsentanten der Nullteilerklassen aus $\mathsf{P}\,\mathfrak{q}$ als zugehöriges Primideal. — Mit $\mathfrak{Q}$ ist aber auch $\mathfrak{q}$ starkes Primärideal. Sei in P nämlich $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{q}$; dann hat man nach Satz 3 für die zugehörigen Erweiterungsideale $(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}\Sigma)(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\Sigma) \equiv \mathfrak{q} + \mathfrak{q}\Sigma \equiv \mathfrak{Q}$. Also wird entweder ein Faktor oder eine endliche Potenz eines jeden von ihnen durch $\mathfrak{Q}$ teilbar. D. h. aber: es wird entweder einer der beiden Faktoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ oder eine endliche Potenz eines jeden von ihnen Vielfaches von $\mathfrak{q}$. — Wird endlich $\mathfrak{P}^e \equiv \mathfrak{Q}$, so auch $\mathfrak{p}^e \equiv \mathfrak{q}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Nicht zutreffend ist im allgemeinen die Behauptung, daß das Verengungsideal $\mathfrak{m}$ eines in Σ irreduziblen Ideals $\mathfrak{M}$ irreduzibel in P ist[31]).

§ 4.

Klasseneinteilung der Ideale von Ober- und Unterring.

1. Definition 1. Zu jedem Erweiterungsideal $\mathfrak{M}$ in Σ ist die zugehörige *Erweiterungsklasse* $k_{\mathfrak{M}}$ in P definiert als Gesamtheit der $\mathfrak{M}$ erzeugenden Ideale $\mathfrak{m}$ in P. — Da $\mathfrak{M}$ Erweiterungsideal ist, bleibt $k_{\mathfrak{M}}$ nicht leer.

---

[30]) $A \neq B$ bedeutet: A ist Untermenge von B, $A \subset B$: A ist echte Untermenge.

[31]) Beispiel. Im Körper der dritten Einheitswurzeln besitzt der Ring $\mathfrak{S}$ aller ganzen algebraischen Zahlen (nach Z. III, S. 523) die irreduzible Modulbasis $1, \alpha$ mit $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$ als Nullstelle von $f(x) = x^2 + x + 1$. Der Modul $\mathfrak{T} = (1, 2\alpha)$ bildet einen Unterring von $\mathfrak{S}$. Das Hauptideal $\mathfrak{S}\,4$ hat die Modulbasis $(4, 4\alpha)$, ist also Ideal in $\mathfrak{T}$. Als Quadrat des Primideals $\mathfrak{p} = (2, 2\alpha)$ in $\mathfrak{S}$ ist es dort irreduzibel; doch in $\mathfrak{T}$ wird $(4, 4\alpha) = (4, 2\alpha) - (2, 4\alpha)$. Beide Komponenten sind Ideale in $\mathfrak{T}$ und echte Teiler von $(4, 4\alpha)$. — Diese „Ordnungen" des Körpers der dritten Einheitswurzeln zieht schon Dedekind zu Beispielen heran (vgl. Z. III, S. 523 oben).

Die Gesamtheit k der Ideale aus P wird die mengentheoretische Summe der sämtlichen, paarweise elementenfremden $k_{\mathfrak{M}}$, $k = \sum_{\mathfrak{M}} k_{\mathfrak{M}}$, wo über alle Erweiterungsideale $\mathfrak{M}$ in Σ zu summieren ist.

Definition 2. Zu jedem Verengungsideal $\mathfrak{n}$ in P ist die zugehörige *Verengungsklasse* $K_{\mathfrak{n}}$ in Σ definiert als Gesamtheit der $\mathfrak{n}$ erzeugenden Ideale $\mathfrak{N}$ in Σ. — Da $\mathfrak{n}$ Verengungsideal ist, bleibt $K_{\mathfrak{n}}$ nicht leer.

Das System K der Ideale in Σ wird entsprechend die Summe $K = \sum_{\mathfrak{n}} K_{\mathfrak{n}}$, wo die Summation über alle Verengungsideale $\mathfrak{n}$ in P zu erstrecken ist.

2. Die Struktur dieser Klassen wird durch folgende Aussagen geklärt:

Satz 1. *In jeder Erweiterungsklasse $k_{\mathfrak{M}}$ gibt es ein einziges Verengungsideal. Dieses ist gleich dem größten gemeinsamen Teiler aller Ideale aus $k_{\mathfrak{M}}$ und Verengungsideal seines zugehörigen Erweiterungsideals $\mathfrak{M}$.*

Und ganz analog

Satz 2. *In jeder Verengungsklasse $K_{\mathfrak{n}}$ gibt es ein einziges Erweiterungsideal. Dieses ist gleich dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller Ideale aus $K_{\mathfrak{n}}$ und Erweiterungsideal des zugehörigen Verengungsideals $\mathfrak{n}$*[32].

Sämtliche in den beiden Beweisen auftretenden Ideale werden als P-Moduln aufgefaßt.

Beweis von Satz 1. $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\nu, \ldots$ seien die Ideale aus $k_{\mathfrak{M}}$. Das zu $\mathfrak{d} = \mathfrak{m}_1 + \ldots + \mathfrak{m}_\nu + \ldots$ gehörige Erweiterungsideal $\mathfrak{D}$ wird nach Satz 1 aus § 3 gleich $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{d}^*$ bezeichne das zu $\mathfrak{D} = \mathfrak{M}$ gehörige Verengungsideal, $\mathfrak{D}^*$ das zu $\mathfrak{d}^*$ gehörige Erweiterungsideal. Es wird $\mathfrak{D}^* \geqq \mathfrak{D}$. Aus $\mathfrak{d} \geqq \mathfrak{d}^*$ folgt $\mathfrak{D} \geqq \mathfrak{D}^*$, somit $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^*$. Hiernach ist $\mathfrak{d}^*$ ein $\mathfrak{m}_\nu$, also $\mathfrak{d}^* \geqq \mathfrak{d}$ und weiter $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^*$, d. h. $\mathfrak{m}_1 + \ldots + \mathfrak{m}_\nu + \ldots$ ist das zu $\mathfrak{M}$ gehörige Verengungsideal. Gäbe es außer $\mathfrak{d}$ in $k_{\mathfrak{M}}$ noch ein Verengungsideal $\mathfrak{n}$, das etwa durch das Ideal $\mathfrak{N}$ aus Σ erzeugt wird, so gälte zunächst $\mathfrak{n} \geqq \mathfrak{d}$. Da $\mathfrak{D} = \mathfrak{M}$ das zu $\mathfrak{n}$ gehörige Erweiterungsideal ist, wird $\mathfrak{D} \geqq \mathfrak{N}$; somit ergibt sich beim Übergang zu den Verengungsidealen in P die Beziehung $\mathfrak{d} \geqq \mathfrak{n}$, also $\mathfrak{d} = \mathfrak{n}$. $\mathfrak{d}$ ist das einzige Verengungsideal in $k_{\mathfrak{M}}$.

Der Beweis von Satz 2 verläuft vollkommen analog.

3. Nunmehr läßt sich zeigen, daß das Verhalten des Quotienten zweier Verengungsideale bestimmt wird durch

Satz 3. *Der Idealquotient $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ zweier Verengungsideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aus* P *ist ebenfalls Verengungsideal. Bedeutet $\mathfrak{A}$ ein beliebiges $\mathfrak{a}$ erzeugendes,*

[32]) Bei der Formulierung dieser beiden Sätze wurde ich von E. Noether unterstützt.

$\mathfrak{B}$ *das zu* $\mathfrak{b}$ *gehörige Erweiterungsideal, so kann* $\mathfrak{c}$ *durch Verengung des Idealquotienten* $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} : \mathfrak{B}$ *erreicht werden.*

Beweis. $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}'$ seien die zu $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}$ gehörigen Erweiterungsideale. Aus $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{c}\,\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{a}$ und daraus durch Erweiterung unter Benutzung von Satz 2 und § 3, Satz 3 die Beziehung $\mathfrak{C}'\mathfrak{B} \geqq \mathfrak{A}' \geqq \mathfrak{A}$. Sei $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} : \mathfrak{B}$, dann ist $\mathfrak{C}' \geqq \mathfrak{C}$. Also kommt für die zugehörigen Verengungsideale $\mathfrak{c}'$ und $\bar{\mathfrak{c}}$ nach Satz 1 $\mathfrak{c} \geqq \mathfrak{c}' \geqq \bar{\mathfrak{c}}$. Aus $\mathfrak{C}\mathfrak{B} \geqq \mathfrak{A}$ schließt man $\bar{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{a}$, also weiter $\bar{\mathfrak{c}} \geqq \mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, somit $\bar{\mathfrak{c}} \geqq \mathfrak{c}$; denn nach Satz 1 ist $\mathfrak{b}$ das zu $\mathfrak{B}$ gehörige Verengungsideal. Hiermit ist der Satz bewiesen.

4. Die eineindeutige Zuordnung der ausgezeichneten Ideale. Für die ausgezeichneten Ideale in P und Σ besteht der folgende

Satz 4. *Zwischen den Verengungsidealen* $\mathfrak{n}$ *in* P *und den Erweiterungsidealen* $\mathfrak{M}$ *in* Σ *gibt es eine eineindeutige bez.* P *und* Σ *symmetrische Zuordnung von der Art: Sind* $\mathfrak{n}$ *und* $\mathfrak{M}$ *einander entsprechende Ideale, so wird das zu* $\mathfrak{M}$ *gehörige Verengungsideal* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, *das zu* $\mathfrak{n}$ *gehörige Erweiterungsideal* $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$.

Beweis. Läßt man jedem Erweiterungsideal $\mathfrak{M}$ in Σ das nach Satz 1 existierende einzige $\mathfrak{M}$ erzeugende Verengungsideal $\mathfrak{m}$ aus P entsprechen, so ist damit eine eineindeutige Zuordnung der ausgezeichneten Ideale in P und Σ gewonnen; denn $\mathfrak{m}$ kann seinerseits aus $\mathfrak{M}$ durch Verengung gewonnen werden. — Ebenso kann man jedem Verengungsideal $\mathfrak{n}$ aus P das nach Satz 2 existierende einzige $\mathfrak{n}$ erzeugende Erweiterungsideal $\mathfrak{N}$ in Σ zuordnen, wodurch eine Abbildung derselben Art erzielt wird. Sie ist überdies mit der ersten identisch.

Folgerung. *Die Zuordnung der ausgezeichneten Ideale induziert eine eineindeutige der Klassen* $k_{\mathfrak{M}}$ *und* $K_{\mathfrak{n}}$ *von der Art: Sind* $k_{\mathfrak{M}}$ *und* $K_{\mathfrak{n}}$ *einander zugeordnete Klassen, so wird das in* $k_{\mathfrak{M}}$ *liegende Verengungsideal von* $\mathfrak{M}$ *identisch mit dem durch* $K_{\mathfrak{n}}$ *bestimmten Verengungsideal* $\mathfrak{n}$, *das in* $K_{\mathfrak{n}}$ *liegende Erweiterungsideal* $\mathfrak{N}$ *von* $\mathfrak{n}$ *identisch mit dem durch* $k_{\mathfrak{M}}$ *bestimmten Erweiterungsideal* $\mathfrak{M}$.

§ 5.

Beziehungen zwischen den Idealen eines beliebigen Systems von Ringen.

In den beiden vorangehenden Paragraphen war ein besonderes, lediglich aus Ober- und Unterring bestehendes System von Ringen zugrunde gelegt. Diese Einschränkung soll jetzt fallen gelassen und das erhaltene Resultat erweitert werden.

Sei also $S : \mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots$ *ein System beliebiger Mächtigkeit* von Ringen P_ν mit gemeinschaftlichem Oberring Φ. P bezeichne ihren Durchschnitts- und Σ ihren Vereinigungsring.

1. Definition und Struktur der Klassen der Ideale eines beliebigen Ringes des Systems. Um zu einer Einteilung der Ideale eines beliebigen Ringes P_ν in Klassen und zu einer Zuordnung der Klassen der verschiedenen Ringe des Systems zu gelangen, werde zuerst die in §§ 3, 4 auseinandergesetzte Einteilung der Ideale von P und Σ in Klassen $k_\mathfrak{M}$ und $K_\mathfrak{n}$ und ihre eineindeutige Zuordnung (nach der Folgerung von Satz 4 aus § 4) ausgeführt. Dann lassen sich folgende Festsetzungen treffen:

Definition 1. Zu jedem Verengungsideal $\mathfrak{n}$ aus P ist die *Verengungsklasse* $\mathsf{K}_\mathfrak{n}$ aus P_ν definiert als Gesamtheit der Ideale aus P_ν, deren Erweiterungsideal in Σ in $K_\mathfrak{n}$ liegt, die also bei Erweiterung nach Σ und nachfolgender Verengung nach P dort das Ideal $\mathfrak{n}$ ergeben.

Definition 2. Zu jedem Erweiterungsideal $\mathfrak{M}$ aus Σ ist die *Erweiterungsklasse* $\varkappa_\mathfrak{M}$ aus P_ν definiert als Gesamtheit der Ideale aus P_ν, deren Verengungsideal in P in $k_\mathfrak{M}$ liegt, die also bei Verengung nach P und nachfolgender Erweiterung nach Σ dort das Ideal $\mathfrak{M}$ ergeben.

Wie später gezeigt werden wird, sind die Klassen $\mathsf{K}_\mathfrak{n}$ und $\varkappa_\mathfrak{M}$ nie leer.

Da die Gesamtheit der Ideale aus Σ in die paarweise elementenfremden Klassen $K_\mathfrak{m}$ zerfällt, wird das System der Ideale aus P_ν auf die paarweise elementenfremden Klassen $\mathsf{K}_\mathfrak{m}$ verteilt. Dasselbe erschließt man für die Klassen $\varkappa_\mathfrak{M}$, weil auch die $k_\mathfrak{M}$ paarweise elementenfremd sind.

Die Klassen $\mathsf{K}_\mathfrak{n}$ aus P_ν besitzen eine eineindeutige Zuordnung zu den Verengungsidealen $\mathfrak{n}$ in P, die $\varkappa_\mathfrak{M}$ eine gleiche zu den Erweiterungsidealen $\mathfrak{M}$ in Σ. Die nach § 4, Satz 4 vorhandene eineindeutige Zuordnung der ausgezeichneten Ideale beider Ringe vermittelt eine ebensolche zwischen den $\mathsf{K}_\mathfrak{n}$ und $\varkappa_\mathfrak{M}$, und sie ist derart, daß allgemein $\varkappa_\mathfrak{M}$ und $\mathsf{K}_\mathfrak{m}$ einander entsprechen, wenn $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{M}$ einander zugeordnete ausgezeichnete Ideale sind.

Die Klassen $\varkappa_\mathfrak{M}$ und $\mathsf{K}_\mathfrak{n}$ enthalten eine ausgezeichnete Menge, die symmetrisch zu einander entsprechenden Klassen $\varkappa_\mathfrak{M}$ und $\mathsf{K}_\mathfrak{m}$ bestimmt ist durch die

Definition 3. Der *Kern* $\lambda_{(\nu)}^{\mathfrak{M}}$ ist definiert als Gesamtheit derjenigen Ideale aus P_ν, deren Erweiterungsideal in Σ mit $\mathfrak{M}$ und deren Verengungsideal in P mit $\mathfrak{m}$ identisch ist.

Hinsichtlich der Struktur des Kernes lassen sich nachstehende Aussagen machen:

a) $\lambda_\mathfrak{m}^\mathfrak{M}$ *liegt im Durchschnitt* $[\varkappa_\mathfrak{M}, \mathsf{K}_\mathfrak{m}]$ *der Klassen* $\varkappa_\mathfrak{M}$ *und* $\mathsf{K}_\mathfrak{m}$. — Das folgt sofort aus der Definition dieser Klassen. Im allgemeinen ist der Kern eine echte Untermenge des Durchschnitts (vgl. 3b).

b) *Der Kern* $\lambda_\mathfrak{m}^\mathfrak{M}$ *ist immer eine nicht leere Menge*, und somit ist auch keine der Klassen $\mathsf{K}_\mathfrak{m}$, $\varkappa_\mathfrak{M}$ leer. Es gehört nämlich sowohl das Er-

weiterungsideal $\mathfrak{m}_1$ in P_ν von $\mathfrak{m}$ aus P, wie auch das Verengungsideal $\mathfrak{m}_2$ in P_ν von $\mathfrak{M}$ aus Σ zum Kern. Denn $\mathfrak{m}$ aus P, also auch $\mathfrak{m}_1$ aus P_ν, erzeugt $\mathfrak{M}$ in Σ; $\mathfrak{M}$ aus Σ, also auch $\mathfrak{m}_2$ aus P_ν, erzeugt $\mathfrak{m}$ in P. Ähnlich schließt man, daß $\mathfrak{m}_1$ bzw. $\mathfrak{m}_2$ bei Vertauschung der Operationen der Erweiterung und Verengung $\mathfrak{m}$ bzw. $\mathfrak{M}$ erzeugen, und damit ist die Behauptung bewiesen.

Im allgemeinen wird $\mathfrak{m}_1 > \mathfrak{m}_2$ (vgl. 3c). $\mathfrak{m}_1$ ist kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{m}_2$ größter gemeinsamer Teiler $\mathfrak{d}$ aller Ideale des Kernes $\lambda_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{M}}$. Denn $\mathfrak{d}$ ist Vielfaches des größten gemeinsamen Teilers $\mathfrak{m}_2$ aller $\mathfrak{M}$ erzeugenden Ideale aus P_ν. Da auch $\mathfrak{m}_2 \geqq \mathfrak{d}$, wird $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{d}$. Ganz entsprechend erhält man $\mathfrak{v} = \mathfrak{m}_1$. Aus diesem Grunde sollen $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ *das obere und untere Ende des Kernes* $\lambda_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{M}}$ genannt werden.

2. Zuordnung der Kerne und Klassen. Entsprechend dem Satz 4 des vorigen Paragraphen gilt hier der

Zuordnungssatz. *Die Mengen der Kerne* $\lambda_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{M}}{}^{(\mu)}$ *und* $\lambda_{\mathfrak{n}}^{\mathfrak{N}}{}^{(\nu)}$ *zweier beliebiger Ringe* P_μ *und* P_ν *des Systems besitzen eine eineindeutige Zuordnung, die bezüglich der Ringe des Systems reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Einander entsprechende Kerne* $\lambda_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{M}}{}^{(\mu)}$ *und* $\lambda_{\mathfrak{n}}^{\mathfrak{N}}{}^{(\nu)}$ *bestimmen hierbei in* Σ *dasselbe Erweiterungsideal* $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$, *in* P *dasselbe Verengungsideal* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

Beweis: Die nach Satz 4 aus § 4 bestehende eineindeutige Abbildung der Verengungsideale in P und der Erweiterungsideale in Σ induziert das im Satz behauptete Entsprechen der Kerne.

Aus dieser *Zuordnung* der Kerne ergibt sich ohne weiteres eine solche *der Klassenpaare* $\{\varkappa_{\mathfrak{M}}^{(\mu)}, \mathsf{K}_{\mathfrak{m}}^{(\mu)}\}$, $\{\varkappa_{\mathfrak{N}}^{(\nu)}, \mathsf{K}_{\mathfrak{n}}^{(\nu)}\}$ der Ringe $\mathsf{P}_\mu, \mathsf{P}_\nu$. Ebenso läßt sich ein Entsprechen allein der Verengungs- oder Erweiterungsklassen der Ringe des Systems herstellen. In allen Fällen besitzt diese Zuordnung entsprechende Eigenschaften wie die der Kerne.

Ein Studium feinerer idealtheoretischer Beziehungen der Ringe des Systems untereinander wird der ausgezeichneten Stellung der Kerne wegen bei ihren Idealen und unter diesen vorzüglich an den Kernenden einzusetzen haben.

3. Bemerkungen und Beispiele. a) Systeme S, die aus Unterring P_1 und Oberring P_2 bestehen. Man überzeugt sich einfach davon, daß die im vorangehenden durchgeführte Einteilung der Ideale jedes Ringes P_ν in Klassen und die eineindeutige Zuordnung der Klassenpaare aller Ringe des Systems im Sonderfall zweier Ringe, von denen der erste P_1 Unterring des zweiten P_2 ist, auf die in den §§ 3, 4 durchgeführte Einteilung der Ideale in Klassen $k_{\mathfrak{M}}$ und $K_{\mathfrak{m}}$ und deren eineindeutige Zu-

ordnung hinauskommt. Es wird $\varkappa_{\mathfrak{M}}^{(1)} = \mathsf{K}_{\mathfrak{m}}^{(1)} = k_{\mathfrak{M}}$, $\varkappa_{\mathfrak{M}}^{(2)} = \mathsf{K}_{\mathfrak{m}}^{(2)} = K_{\mathfrak{m}}$; der Kern $\lambda_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{M}}{}_{(1)}$ wird mit $\mathfrak{m}$, $\lambda_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{M}}{}_{(2)}$ mit $\mathfrak{M}$ identisch.

b) Beispiel für $\lambda_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{M}} \subset [\varkappa_{\mathfrak{M}}, \mathsf{K}_{\mathfrak{m}}]$. Der in a) erwähnte Spezialfall liefert sogleich Beispiele dafür, daß im allgemeinen $\lambda_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{M}}$ wirklich eine echte Untermenge von $[\varkappa_{\mathfrak{M}}, \mathsf{K}_{\mathfrak{m}}]$ wird. Sei nämlich wie in Fußnote [31]) wieder $\mathfrak{S} = (1, \alpha)$ das System aller ganzen algebraischen Zahlen des Körpers der 3. Einheitswurzeln. $\mathfrak{T} = (1, 2\alpha)$ ist Unterring von $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{p} = (2, 2\alpha)$ ist Ideal in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$, also Erweiterungsideal in $\mathfrak{S}$ (bez. $\mathfrak{T}$) und zugleich Verengungsideal in $\mathfrak{T}$ (bez. $\mathfrak{S}$). Deshalb ist $\mathfrak{p}$ der Kern der Klasse $k_{\mathfrak{p}} = \varkappa_{\mathfrak{p}}^{(\mathfrak{T})} = \mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{(\mathfrak{T})}$ aus $\mathfrak{T}$. $k_{\mathfrak{p}}$ aber besteht nicht nur aus $\mathfrak{p}$; denn das Ideal $\mathfrak{q} = (2, 4\alpha)$ aus $\mathfrak{T}$ liefert durch Erweiterung nach $\mathfrak{S}$ ebenfalls $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}\mathfrak{S}$.

c) Beispiel für Verschiedenheit der Kernenden. Im Körper der 3. Einheitswurzeln bilden die drei Moduln $\mathfrak{T}_1 = (1, 4\alpha)$, $\mathfrak{T}_2 = (1, 2\alpha)$, $\mathfrak{S} = (1, \alpha)$ ein System $\mathfrak{S}: \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{S}$ von Ringen mit $\mathsf{P} = \mathfrak{T}_1$, $\Sigma = \mathfrak{S}$. Der Modul $\mathfrak{m} = (2, 4\alpha)$ ist Ideal in $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{M} = (2, 2\alpha)$ eines in $\mathfrak{S}$; zudem sind sie einander entsprechende ausgezeichnete Ideale aus P und Σ. Beide Moduln sind aber auch Ideale in $\mathfrak{T}_2$ und gehören dort offenbar zum Kern $\lambda_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{M}}$. Also werden dessen Enden wegen $\mathfrak{m} > \mathfrak{M}$ verschieden.

§ 6.

Quotientenringe.

Als Anwendung der §§ 3, 4 wird ein Ringsystem S betrachtet, das nur aus Ober- und Unterring besteht, und zwar ist der Unterring ein beliebiger Ring P, der Oberring Σ ein Quotientenring $\frac{\mathsf{P}}{G}$ (vgl. § 1, 5). Dann sind die Beziehungen der Ideale von P und Σ festgelegt durch den folgenden

Satz. *Die Gesamtheit I_Σ der Ideale des Ringes Σ und das System I_P der Verengungsideale in P (bez. Σ) bilden zwei isomorphe, vollständige Idealkörper. Hierbei einander zugeordnete Ideale sind die nach der allgemeinen Zuordnung* (§ 4, 4) *einander entsprechenden ausgezeichneten Ideale.*

Der Beweis des Satzes geschieht in vier Schritten. Ihnen zugrunde liegt folgende, die Struktur eines Verengungsideals in P aufklärende

Bemerkung. Das Verengungsideal $\mathfrak{m}$ eines Ideals $\mathfrak{M}$ aus Σ besteht aus der Gesamtheit der Zähler ϱ der Elemente $\frac{\varrho}{a}$ von $\mathfrak{M}$. (Dabei bedeutet ϱ ein Element aus P, a eines des den Quotientenring erzeugenden Systems G.)

Beweis. In jedem Ideal $\mathfrak{M}$ gibt es Elemente der Form $\frac{\varrho}{a}$, z. B. $\frac{0}{a} = 0$. Bezeichne Z das System der Zähler ϱ. Für ein beliebiges $\frac{\varrho}{a} \equiv 0\,(\mathfrak{M})$ ist

$\varrho = \frac{\varrho}{a} \cdot a$ in $\mathfrak{M}$ und P, also auch in $\mathfrak{M} - \mathsf{P} = \mathfrak{m}$ enthalten: $Z \nmid \mathfrak{m}$. Da Σ ein Einheitselement besitzt, sind die Erweiterungsideale der Ideale $\mathfrak{n}$ aus P von der Form $\mathfrak{n}\Sigma$. Ist also $\mu \equiv 0(\mathfrak{m})$, so wird demzufolge $\mu \cdot \frac{a}{a^2} = \frac{\mu}{a} \equiv 0(\mathfrak{m}\Sigma)$, also wegen $\mathfrak{m}\Sigma \geqq \mathfrak{M}$ auch $\frac{\mu}{a} \equiv 0(\mathfrak{M})$, bei beliebigem a aus G. Somit gehört μ zu Z, $\mathfrak{m} \nmid Z$, also $\mathfrak{m} = Z$.

Hiermit ist zugleich bewiesen: 1. *Jedes Ideal in Σ ist Erweiterungsideal bez.* P. Demnach besteht zwischen den Idealen in Σ und den Verengungsidealen in P die in § 4, Satz 4 ausgesprochene eineindeutige Zuordnung. Es bleibt der Nachweis zu führen, daß in den beiden aufeinander abgebildeten Systemen I_Σ, I_P wirklich vollständige Idealkörper vorliegen und daß sie isomorph sind.

2. Nun gilt nach § 3, Satz 2 und § 4, Satz 3, daß I_P neben beliebig vielen Idealen auch ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches und neben zweien auch deren Quotienten enthält. Aus denselben Sätzen folgt zugleich, daß dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen beliebig vieler und dem Quotienten zweier Ideale aus I_P das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und der Quotient der entsprechenden Ideale des vollständigen Idealkörpers I_Σ zugeordnet ist.

I_P enthält aber neben $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ auch $\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2$ sowie neben beliebig vielen Idealen auch ihren größten gemeinsamen Teiler, und auch hier herrscht Entsprechen der Verknüpfungsresultate. — Beweis:

3. Produkt. $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ aus I_P seien $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ aus I_Σ zugeordnet. Sei $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{m}}$ das zu $\mathfrak{M}$ gehörige Verengungsideal in P. Sicher ist im Körper aller Ideale aus P erfüllt $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \geqq \overline{\mathfrak{m}}$. Zufolge der eingangs gemachten Bemerkung besteht $\overline{\mathfrak{m}}$ aus allen Zählern der Elemente von $\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$. Ein solches hat die Form $\sum \frac{\mu_1}{a_1} \cdot \frac{\mu_2}{a_2}$ mit $\mu_1 \equiv 0(\mathfrak{m}_1)$, $\mu_2 \equiv 0(\mathfrak{m}_2)$, a_1, a_2 aus G. (Ein Element μ aus $\mathfrak{m}_1$ kann ebenfalls in der Form $\frac{\mu_1}{a_1}$ angenommen werden: $\mu = \frac{\mu\, a_1}{a_1} = \frac{\mu_1}{a_1}$.) Demnach haben die Zähler folgendes Aussehen: $\sum \mu_1 \mu_2 a_{12}$ mit a_{12} aus G. $\sum \mu_1 \mu_2 a_{12} = \sum \mu_1 (\mu_2 a_{12})$ aber ist Element von $\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2$, also kommt $\overline{\mathfrak{m}} \geqq \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2$, somit: $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2$ gehört zu I_P. Man sieht auch sofort die Zuordnung der Verknüpfungsresultate.

4. Größter gemeinsamer Teiler. Den Idealen $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\nu, \ldots$ aus I_P mögen in I_Σ entsprechen $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_\nu, \ldots$. Sei $\mathfrak{M}_1 + \ldots + \mathfrak{M}_\nu + \ldots = \mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{d}}$ das zugehörige Verengungsideal und im Körper aller Ideale aus P noch $\mathfrak{d} = \mathfrak{m}_1 + \ldots + \mathfrak{m}_\nu \ldots$. Dort wird $\mathfrak{d} \geqq \overline{\mathfrak{d}}$. $\overline{\mathfrak{d}}$ besteht aus den Zählern der Elemente von $\mathfrak{D}$; diese Elemente haben die Form $\sum \frac{\mu_\nu}{a_\nu}$, also zeigen die Zähler das Aussehen $\sum \mu_\nu a'_\nu$. Das aber sind Elemente von $\mathfrak{d}$, da ja

$\mu_\nu a_\nu \equiv 0(\mathfrak{m}_\nu)$ ist. Auch $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}_1 + \ldots + \mathfrak{m}_\nu + \ldots = \bar{\mathfrak{b}}$ gehört also zu I_P und wieder hat man das Entsprechen der Verknüpfungsrelationen.

Der Umstand, daß jedes Ideal aus Σ Erweiterungsideal bez. P ist, erlaubt es, die nachstehende Folgerung auszusprechen:

Sind $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{Q}$ *einander entsprechende Ideale aus* P *und* Σ, *so sind entweder beide gleichzeitig starke Primärideale in* P (*d. h. im Körper aller* (!) *Ideale aus* P) *bzw.* Σ, *oder beide nicht. Im ersten Fall besitzen sie gleiche* (*endliche oder unendliche*) *Exponenten und ihre zugehörigen Primideale sind einander entsprechende Ideale aus* P *und* Σ. Eine *analoge Aussage* gilt für *schwache Primärideale.*

Beweis. a) Ist $\mathfrak{Q}$ in einer der beiden Arten Primärideal in Σ mit $\mathfrak{P}$ als zugehörigem Primideal und dem Exponenten ϱ, so ist $\mathfrak{q}$ in P Primärideal derselben Art mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} - \mathsf{P}$ als zugehörigem Primideal und einem Exponenten $\sigma \leqq \varrho$. Das folgt sofort aus dem Satz 4 von § 3. Es kann aber nicht sein $\sigma < \varrho$; denn $\mathfrak{p}^\sigma \geqq \mathfrak{q}$ hat zur Folge $\mathfrak{P}^\sigma \geqq \mathfrak{Q}$. Somit sind die Exponenten gleich.

b) Ist $\mathfrak{q}$ in P starkes Primärideal (Primideal), so auch $\mathfrak{Q}$ in Σ. Sonst nämlich hätte man für wenigstens ein Paar von Idealen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die Beziehung $\mathfrak{A} < \| \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{B}^\varkappa < \| \mathfrak{Q}$ (für jedes $\varkappa$), $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \geqq \mathfrak{Q}$. Für die zugehörigen Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in P würde dann $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{q}$, also entweder etwa $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{q}$ und somit $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{a}^\lambda, \mathfrak{b}^\lambda \geqq \mathfrak{q}$ und dann $\mathfrak{B}^\lambda \geqq \mathfrak{Q}$. Genau so erledigt sich die auf das Primideal bezügliche Behauptung.

c) Ist $\mathfrak{q}$ schwachprimär in P, so auch $\mathfrak{Q}$ in Σ. Dazu ist zu bemerken, daß als Basiselement eines Hauptideals in Σ stets ein Element aus P genommen werden kann. Ist etwa $\sigma = \frac{\varrho}{a}$, so ist $(\varrho) = \varrho\,\Sigma \geqq (\sigma) = \sigma\,\Sigma$; wegen $\sigma = \frac{\varrho}{a} = \varrho \cdot \frac{a}{a^2}$ aber auch $(\sigma) \geqq (\varrho)$, somit $(\sigma) = (\varrho)$. Die Basiselemente der nachfolgenden Hauptideale sollen also in P liegen. Wäre nun $\mathfrak{Q}$ nicht schwachprimär, so gäbe es in Σ zwei Hauptideale $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} < \| \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{B}^\varkappa < \| \mathfrak{Q}$ (für jedes $\varkappa$), $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \geqq \mathfrak{Q}$. Für die Verengungsideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ hätte man $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{q}$. Ist $\mathfrak{A} = (\alpha)$, $\mathfrak{B} = (\beta)$, so wird, wenn $\alpha \cdot \mathsf{P} = \{\alpha\}$, $\beta \cdot \mathsf{P} = \{\beta\}$ gesetzt wird, $\{\alpha\}\{\beta\} \geqq \mathfrak{a}\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{q}$, also entweder $\alpha \equiv 0(\mathfrak{q})$ und damit $(\alpha) = \alpha\,\Sigma \geqq \mathfrak{Q}$, oder $\alpha^\lambda, \beta^\lambda \equiv 0(\mathfrak{q})$, und damit $\beta^\lambda \cdot \Sigma = \mathfrak{B}^\lambda \geqq \mathfrak{Q}$, gegen die Voraussetzung.

d) Ist $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{q}$ gehöriges Primideal, so ist $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{Q}$ gehörig. Ist $\mathfrak{P}'$ nämlich das zu $\mathfrak{Q}$ gehörige Primideal, so gehört nach § 3, Satz 4 das Ideal $\mathfrak{p}' = \mathfrak{P}' - \mathsf{P}$ zu $\mathfrak{q}$. Also wird $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$ und daraus folgt $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$. — Der Satz ist damit völlig bewiesen.

Bemerkung. Daß zwei einander zugeordnete Ideale $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{q}$ gleichzeitig in I_Σ bzw. I_P Primärideale sind oder nicht, folgt schon aus der

Isomorphie der beiden Idealkörper. Unter Benutzung des Umstandes, daß I_Σ der Körper aller Ideale aus Σ ist, also $\mathfrak{L}$ sicher ein zugehöriges Primideal $\mathfrak{P}$ in I_Σ besitzt, folgt ebendaraus für $\mathfrak{q}$ die Existenz eines zugehörigen Primideals $\mathfrak{p}$ in $I_\mathfrak{p}$, sowie das Übereinstimmen der Exponenten (vgl. den Schluß von § 1).

§ 7.

Der Führer. Die Körper der zum Führer teilerfremden Ideale.

1. Definition und allgemeine Eigenschaften des Führers. Wie in § 5 sei $S: \mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots, \mathsf{P}_\nu, \ldots$ ein System beliebiger Mächtigkeit von Ringen; P bezeichne den Durchschnitts- und Σ den Vereinigungsring.

Definition. Der *Führer* $\mathfrak{f}$ des Systems S ist definiert als größter gemeinsamer Teiler aller Ideale aus Σ, die zugleich Ideale in P sind. — Da wenigstens ein Ideal aus Σ, das Nullideal nämlich, zugleich Ideal in P ist, so existiert $\mathfrak{f}$ stets.

$\mathfrak{f}$ *ist Ideal in* P *und somit allen Ringen* P_ν. Dazu braucht nur gezeigt zu werden, daß die Menge der Elemente von $\mathfrak{f}$ in P enthalten ist. Das aber ergibt sich direkt aus der Struktur des größten gemeinsamen Teilers $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1 + \ldots + \mathfrak{f}_\nu + \ldots$, wo $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_\nu, \ldots$ die Ideale aus Σ sind, die zugleich in P liegen. — Jedes Ideal aus P, das zugleich Ideal in Σ ist, wird teilbar durch $\mathfrak{f}$; doch muß nicht umgekehrt jedes durch $\mathfrak{f}$ teilbare Ideal aus P Ideal in Σ sein[33]). — *Enthält* Σ *ein Einheitselement* e und faßt man P und Σ als P-Moduln auf, *so wird* $\mathfrak{f} = \mathsf{P} : \Sigma$. Bezeichnet P_i' den Vereinigungsring aller P_ν bis auf P_i und wird vorausgesetzt, daß e schon in P liegt, so kommt $\mathfrak{f} = (\mathsf{P}_1 : \mathsf{P}_1') - \ldots - (\mathsf{P}_\nu : \mathsf{P}_\nu') - \ldots$. Denn sicher ist $\mathfrak{f}\mathsf{P}_i' \geqq \mathsf{P}_i$, also $\mathfrak{f} \geqq \mathfrak{V}$, wo $\mathfrak{V}$ für $(\mathsf{P}_1 : \mathsf{P}_1') - \ldots - (\mathsf{P}_\nu : \mathsf{P}_\nu') - \ldots$ gesetzt ist. Weiter wird $\mathsf{P}_i \mathsf{P}_i' = \Sigma$; denn einmal ist $\mathsf{P}_i \mathsf{P}_i' \geqq \Sigma$, zum andern liegt jedes P_ν, also auch Σ, in $\mathsf{P}_i \mathsf{P}_i'$, da P_i und P_i' das Einheitselement e enthalten, also wird $\Sigma = \mathsf{P}_i \mathsf{P}_i'$. Somit folgt aus $\mathfrak{V}\mathsf{P}_i' \geqq \mathsf{P}_i$ die Beziehung $\mathfrak{V}\mathsf{P}_i'\mathsf{P}_i = \mathfrak{V}\Sigma \geqq \mathsf{P}_i^2 = \mathsf{P}_i$. $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}\Sigma$ ist also ein in P gelegener Σ-Modul, d. h. ein in P gelegenes Ideal aus Σ. Demnach hat man $\mathfrak{V} \geqq \mathfrak{f}$ und damit $\mathfrak{V} = \mathfrak{f} = (\mathsf{P}_1 : \mathsf{P}_1') - \ldots - (\mathsf{P}_\nu : \mathsf{P}_\nu') - \ldots$[34]).

---

[33]) Bestehen dieselben Bezeichnungen wie in Fußnote [31]), so liegt das Ideal $\mathfrak{p}$ mit der Modulbasis $(2, 2\alpha)$ zugleich in $\mathfrak{T} = (1, 2\alpha)$ und $\mathfrak{S} = (1, \alpha)$ und ist offenbar der Führer des Systems $S: \mathfrak{T}, \mathfrak{S}$. Es hat nämlich in $\mathfrak{S}$ nur das Einheitsideal $\mathfrak{S}$ als echten Teiler und man hat $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{S}$. Der Modul $\mathfrak{q} = (2, 4\alpha)$ ist Ideal in $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{q} \geqq \mathfrak{p}$; aber $\mathfrak{q}$ ist nicht Ideal in $\mathfrak{S}$, weil $2\alpha \not\equiv 0 \,(\mathfrak{q})$ wird. $(1, \alpha$ eine irreduzible Basis von $\mathfrak{S}$.)

[34]) Offenbar bildet dieser Begriff des Führers samt seinen Darstellungsformen die genaue Verallgemeinerung dessen, was Dedekind in der in [2]) erwähnten Arbeit § 7 gibt.

2. Die Bereiche der zum Führer teilerfremden Ideale der Ringe des Systems. Um in einem beliebigen System von Ringen die Theorie der zum Führer teilerfremden Ideale entwickeln zu können, ist es zunächst erforderlich, in einem Ring Σ und dessen Unterring P die Beziehungen derjenigen Ideale aufzustellen, die zu einem in beiden Ringen gelegenen Ideal teilerfremd sind.

1. Dementsprechend sei Σ ein Ring, dessen Einheitselement in seinem Unterring P liegt. $\mathfrak{g}$ bedeute ein Ideal aus Σ in P, während G_1, G_2 das System der zu $\mathfrak{g}$ teilerfremden Ideale aus P, Σ bezeichnet. Läßt man bei der Bildung des größten gemeinsamen Teilers evtl. auch unendlich viele Ideale zu, so bilden nach den Rechenregeln der teilerfremden Ideale G_P und G_Σ nach unten vollständige Idealkörper. Für sie besteht der

Satz. *Die nach unten vollständigen Idealkörper G_P und G_Σ der zu $\mathfrak{g}$ teilerfremden Ideale aus P und Σ sind arithmetisch-isomorph. Einander zugeordnete Ideale entsprechen sich in der allgemeinen Zuordnung als ausgezeichnete Ideale und haben ringisomorphe Restklassenringe.*

Der Beweis des Satzes stützt sich auf zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. $\mathfrak{m}$ sei ein beliebiges, zu $\mathfrak{g}$ teilerfremdes Ideal aus P, $\mathfrak{M}$ das zugehörige Erweiterungsideal in Σ. Dann wird $\mathsf{P} \mid \mathfrak{m} \backsim \Sigma \mid \mathfrak{M}$. Ist $\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{c} \geqq \mathsf{P}$ und dem Ideal $\mathfrak{c} \mid \mathfrak{m}$ aus $\mathsf{P} \mid \mathfrak{m}$ durch diese Ringisomorphie in $\Sigma \mid \mathfrak{M}$ das Ideal $\mathfrak{C}^* \mid \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \geqq \mathfrak{C}^* \geqq \Sigma$ zugeordnet, so wird $\mathfrak{C}^*$ das zu $\mathfrak{c}$ gehörige Erweiterungsideal, $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C} = \mathfrak{c}\Sigma$. — Entsprechend hat man

Hilfssatz 2. $\mathfrak{N}$ sei ein beliebiges zu $\mathfrak{g}$ teilerfremdes Ideal aus Σ, $\mathfrak{n}$ das zugehörige Verengungsideal in P. Dann wird $\Sigma \mid \mathfrak{N} \backsim \mathsf{P} \mid \mathfrak{n}$. Ist $\Sigma \geqq \mathfrak{T} \geqq \mathfrak{N}$ und dem Ideal $\mathfrak{T} \mid \mathfrak{N}$ aus $\Sigma \mid \mathfrak{N}$ durch diese Ringisomorphie in $\mathsf{P} \mid \mathfrak{n}$ das Ideal $\mathfrak{d}^* \mid \mathfrak{n}$ mit $\mathsf{P} \geqq \mathfrak{d}^* \geqq \mathfrak{n}$ zugeordnet, so wird $\mathfrak{d}^*$ das zu $\mathfrak{D}$ gehörige Verengungsideal $\mathfrak{d}^* = \mathfrak{d} = \mathfrak{D} - \mathsf{P}$.

Beweis. Beweis von Hilfssatz 1. Aus $\mathfrak{m} + \mathfrak{g} = \mathsf{P}$ folgt $(\mathfrak{m} + \mathfrak{g})\Sigma = \mathfrak{M} + \mathfrak{g} = \Sigma$, also nach dem II. Isomorphiesatz, weil $\mathfrak{g}\mathfrak{m} = \mathfrak{g} - \mathfrak{m} = \mathfrak{g}\mathfrak{M} = \mathfrak{g} - \mathfrak{M}$ ist,

$$\Sigma \mid \mathfrak{M} = \mathfrak{g} + \mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \simeq \mathfrak{g} \mid \mathfrak{g}\mathfrak{M} = \mathfrak{g} \mid \mathfrak{g}\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{g} + \mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} = \mathsf{P} \mid \mathfrak{m}.$$

Nach § 2, 2 wird das dem Ideal $\mathfrak{c}$ durch diese Isomorphiekoppelung zugeordnete Ideal $\mathfrak{C}^* = [\mathfrak{c}_\mathfrak{g}]^\mathfrak{M} = (\mathfrak{c} - \mathfrak{g}) + \mathfrak{M} = (\mathfrak{c} - \mathfrak{g}) + \mathfrak{M} \cdot \mathsf{P} = \mathfrak{c}\mathfrak{g} - \mathfrak{g}\mathfrak{M} + \mathfrak{c}\mathfrak{M} = \mathfrak{c}(\mathfrak{g} + \mathfrak{M}) = \mathfrak{c}\Sigma = \mathfrak{C}$.

Beweis von Hilfssatz 2. Aus $\mathfrak{N} + \mathfrak{g} = \Sigma$ folgt $(\mathfrak{N} + \mathfrak{g}) - \mathsf{P} = \mathsf{P} = \mathfrak{g} + (\mathfrak{N} - \mathsf{P})$ nach dem 1. distributiven Gesetz (§ 1, 1). Somit kommt

$$\mathsf{P} \mid \mathfrak{n} = \mathfrak{g} + \mathfrak{n} \mid \mathfrak{n} \backsim \mathfrak{g} \mid \mathfrak{g} - \mathfrak{n} = \mathfrak{g} \mid \mathfrak{g} - \mathfrak{N} \backsim \mathfrak{g} + \mathfrak{N} \mid \mathfrak{N} = \Sigma \mid \mathfrak{N}.$$

Wieder nach § 2, 2 wird das dem Ideal $\mathfrak{D}$ durch diese Isomorphiekoppelung zugeordnete $\mathfrak{d}^* = [\mathfrak{D}_\mathfrak{g}]^\mathfrak{n} = (\mathfrak{D} - \mathfrak{g}) + \mathfrak{n} = \mathfrak{D} - (\mathfrak{g} + \mathfrak{n}) = \mathfrak{D} - \mathsf{P} = \mathfrak{d}$.

Es ist daraus sofort zu schließen:

1. *Jedes zu* $\mathfrak{g}$ *teilerfremde Ideal* $\mathfrak{m}$ *aus* P *ist Verengungsideal seines ebenfalls zu* $\mathfrak{g}$ *teilerfremden zugehörigen Erweiterungsideales* $\mathfrak{M}$ *in* Σ.

2. *Jedes zu* $\mathfrak{g}$ *teilerfremde Ideal* $\mathfrak{N}$ *aus* Σ *ist Erweiterungsideal seines ebenfalls zu* $\mathfrak{g}$ *teilerfremden zugehörigen Verengungsideals* $\mathfrak{n}$ *aus* P.

Beweis von 1. Das zu $\mathfrak{m}$ gehörige Erweiterungsideal $\mathfrak{M}$ ist zu $\mathfrak{g}$ teilerfremd. $\mathfrak{m}'$ bezeichne sein Verengungsideal. Man hat $\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{m}'$ und $\Sigma \,|\, \mathfrak{M} \sim \mathsf{P} \,|\, \mathfrak{m}$. Wäre $\mathfrak{m} > \mathfrak{m}'$, so hätte man in $\mathsf{P} \,|\, \mathfrak{m}$ die Beziehung $\mathfrak{m}' \,|\, \mathfrak{m} \neq (0)$. Nach Hilfssatz 1 also wäre das zu $\mathfrak{m}'$ gehörige Erweiterungsideal $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}$. Somit kommt $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' = \mathfrak{M} - \mathsf{P}$.

Beweis von 2. Das zu $\mathfrak{N}$ gehörige Verengungsideal $\mathfrak{n}$ ist zu $\mathfrak{g}$ teilerfremd. $\mathfrak{N}'$ bezeichne sein Erweiterungsideal. Man hat $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{N}'$ und $\mathsf{P} \,|\, \mathfrak{n} \sim \Sigma \,|\, \mathfrak{N}'$. Wäre $\mathfrak{N} < \mathfrak{N}'$, so hätte man in $\Sigma \,|\, \mathfrak{N}'$ die Beziehung $\mathfrak{N} \,|\, \mathfrak{N}' \neq (0)$. Nach Hilfssatz 2 also wäre das zu $\mathfrak{N}$ gehörige Verengungsideal $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{n}$. Somit kommt $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}' = \mathfrak{n}\Sigma$.

Nach diesen beiden Bemerkungen liefert die in § 4 hergestellte eineindeutige Zuordnung der ausgezeichneten Ideale beider Ringe P und Σ als Teilzuordnung ein eineindeutiges Entsprechen der beiden Systeme G_P und G_Σ. Um den Beweis des Satzes zu vollenden, macht man folgende, sofort einleuchtende

Bemerkung. Sind $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{M}$ einander zugeordnete Ideale aus G_P und G_Σ, so wird $\mathsf{P} \,|\, \mathfrak{m} \sim \Sigma \,|\, \mathfrak{M}$. Zwei einander durch diese Ringisomorphie zugeordnete Ideale $\mathfrak{a} \,|\, \mathfrak{m}$ aus $\mathsf{P} \,|\, \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{A} \,|\, \mathfrak{M}$ aus $\Sigma \,|\, \mathfrak{M}$ stehen in der Beziehung, daß $\mathfrak{a}$ Verengungsideal von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$ Erweiterungsideal von $\mathfrak{a}$ ist. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes 7 aus § 2, 2 erfüllt, also sind die beiden nach unten vollständigen Idealkörper G_P und G_Σ arithmetisch-isomorph.

Insbesondere ergibt sich noch aus der Ringisomorphie der Restklassenringe einander entsprechender Ideale $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{M}$, daß $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{M}$ beide gleichzeitig in P bzw. Σ, d. h. im Körper aller (!) Ideale aus P bzw. Σ starkprimär sind oder beide nicht, im ersten Fall haben sie denselben Exponenten, und ihre zugehörigen Primideale sind einander entsprechende Ideale aus G_P und G_Σ. Analoges gilt für schwache Primärideale.

II. Die im vorangehenden erreichten Resultate gestatten, den Fall eines beliebigen Systems $S: \mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_\nu, \ldots$ von Ringen zu erledigen. Es soll dabei vorausgesetzt werden, daß der Vereinigungsring Σ der P_ν ein Einheitselement enthält, das schon in ihrem Durchschnittsring P liegt. In jedem P_ν kann man dann von zueinander teilerfremden Idealen reden.

Werden wie in I. bei der Bildung des größten gemeinsamen Teilers evtl. auch unendlich viele Ideale zugelassen, so bildet die Gesamtheit F_ν der zum Führer $\mathfrak{f} = \mathsf{P} : \Sigma$ des Systems teilerfremden Ideale aus P_ν einen nach unten vollständigen Idealkörper. Für diese F_ν besteht der

Hauptsatz. *Die Körper der zum Führer* $\mathfrak{f}$ *teilerfremden Ideale der Ringe* P_ν *sind untereinander isomorph. Hierbei einander zugeordnete Ideale sind einander in der allgemeinen Zuordnung* (§ 5) *entsprechende Kerne; zudem besitzen sie ringisomorphe Restklassenringe.*

Beweis. 1. Um zuerst die *Möglichkeit einer eineindeutigen Zuordnung* der Ideale der verschiedenen F_ν darzutun, zeigt man: a) Jedes Ideal eines F_ν ist Kernideal. b) Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde, einander entsprechende ausgezeichnete Ideale aus P und Σ, so besteht jeder Kern $\lambda^{(\nu)}_{\mathfrak{a}}{}^{\mathfrak{A}}$ aus genau einem Ideal.

Beweis von a): Sei $\mathfrak{a}_\nu$ ein zu $\mathfrak{f}$ teilerfremdes Ideal aus P_ν. Da $\mathfrak{f}$ Ideal aus Σ in P_ν ist, wird $\mathfrak{a}_\nu$ nach I 1. Verengungsideal seines zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Erweiterungsideals $\mathfrak{A}$ in Σ. Bei Verengung nach P liefert deshalb $\mathfrak{a}_\nu$ das zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde Verengungsideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{A}$. Da aber $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{A}$ nach I als ausgezeichnete Ideale einander entsprechen, ist $\mathfrak{a}_\nu$ Kernideal.

Beweis von b): Man zeigt für ein $\lambda^{(\nu)}_{\mathfrak{a}}{}^{\mathfrak{A}}$ das Zusammenfallen der Kernenden $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$. Bei Verengung nach P bestimmt $\mathfrak{k}_1$ dort $\mathfrak{a}$, wird somit in P_ν zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd, also das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Erweiterungsideal in P_ν. Dasselbe trifft für $\mathfrak{k}_2$ zu, und so hat man $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_2$. — Speziell besteht der zu dem in a) erwähnten Ideal $\mathfrak{a}_\nu$ gehörige Kern $\lambda^{(\nu)}_{\mathfrak{a}}{}^{\mathfrak{A}}$ lediglich aus $\mathfrak{a}_\nu$; und alle diesem Kern in einem beliebigen Ring P_μ nach der allgemeinen Zuordnung des § 5 entsprechenden Kerne bestehen gleichfalls aus nur einem Ideal, das zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd ist. Diese Abbildung der Kerne zweier beliebiger Ringe $\mathsf{P}_\nu, \mathsf{P}_\mu$ induziert als Teilabbildung ein eineindeutiges Entsprechen der zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Ideale der Ringe. Dieses ist bezüglich der Ringe P_ν reflexiv, symmetrisch und transitiv.

2. Zum Nachweis der Isomorphie überzeugt man sich von der Richtigkeit der

Bemerkung. *Einander entsprechende Ideale* $\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_\nu$ *aus* F_μ, F_ν *haben in* $\mathsf{P}_\mu, \mathsf{P}_\nu$ *ringisomorphe Restklassenringe,* $\mathsf{P}_\mu \,|\, \mathfrak{a}_\mu \sim \mathsf{P}_\nu \,|\, \mathfrak{a}_\nu$. *Wird dem Ideal* $\mathfrak{c}_\mu \,|\, \mathfrak{a}_\mu$ *aus* $\mathsf{P}_\mu \,|\, \mathfrak{a}_\mu$ mit $\mathfrak{a}_\mu \geqq \mathfrak{c}_\mu \geqq \mathsf{P}_\mu$ *durch diesen Ringisomorphismus das Ideal* $\mathfrak{c}_\nu \,|\, \mathfrak{a}_\nu$ *in* $\mathsf{P}_\nu \,|\, \mathfrak{a}_\nu$ mit $\mathfrak{a}_\nu \geqq \mathfrak{c}_\nu \geqq \mathsf{P}_\nu$ *zugeordnet, so sind* $\mathfrak{c}_\mu$ *und* $\mathfrak{c}_\nu$ *einander entsprechende Ideale aus* F_μ *und* F_ν.

Beweis. Einander zugeordnete Ideale $\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_\nu$ bestimmen in Σ dasselbe Erweiterungsideal $\mathfrak{A}$. Daraus folgt nach I die Ringisomorphie

$\mathfrak{P}_\mu \mid \mathfrak{a}_\mu \simeq \Sigma \mid \mathfrak{A} \sim \mathfrak{P}_\nu \mid \mathfrak{a}_\nu$. $\mathfrak{c}_\mu \mid \mathfrak{a}_\mu$ und $\mathfrak{c}_\nu \mid \mathfrak{a}_\nu$ bestimmen durch diese Ringisomorphie in $\Sigma \mid \mathfrak{A}$ beide dasselbe Ideal $\mathfrak{C} \mid \mathfrak{A}$, somit ist nach Hilfssatz 1 aus I das Ideal $\mathfrak{C}$ Erweiterungsideal von $\mathfrak{c}_\mu$ und $\mathfrak{c}_\nu$ in Σ. Als zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde Ideale bilden $\mathfrak{c}_\mu$, $\mathfrak{c}_\nu$ Kerne, somit wird $\overset{\mathfrak{C}}{\underset{\mathfrak{c}}{\lambda}}{}^{(\mu)} = \mathfrak{c}_\mu$, $\overset{\mathfrak{C}}{\underset{\mathfrak{c}}{\lambda}}{}^{(\nu)} = \mathfrak{c}_\nu$, d. h. aber $\mathfrak{c}_\mu$ und $\mathfrak{c}_\nu$ sind einander zugeordnete Ideale aus F_μ und F_ν. — Demzufolge sind wieder die Voraussetzungen des Satzes 7 aus § 2, 2 erfüllt, also F_μ und F_ν arithmetisch-isomorph.

Genau wie unter I ergibt sich aus der Isomorphie der Restklassenringe einander entsprechender Ideale $\mathfrak{a}_\mu$ und $\mathfrak{a}_\nu$ insbesondere, daß beide gleichzeitig in $\mathfrak{P}_\mu$ und $\mathfrak{P}_\nu$ starkprimär sind oder nicht; im ersten Fall besitzen sie gleiche Exponenten und ihre zugehörigen Primideale sind einander entsprechende Ideale aus F_μ und F_ν. Analoges gilt bei schwachen Primäridealen.

III. Anwendung auf besondere Fälle. Aus den in II entwickelten allgemeinen Überlegungen sollen noch einige spezielle Folgerungen gezogen werden.

1. $S: \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_\nu, \ldots$ sei ein Ringsystem wie in II. Gilt in einem Ring $\mathfrak{P}_\nu$ der Teilerkettensatz (vgl. N. Einleitung), so besteht in ihm die allgemeine Idealtheorie mit den bekannten vier Zerlegungen[35]). Werden in jedem Ring nur zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde Ideale in Betracht gezogen und ist eine beliebige der vier Darstellungen eines solchen Ideals gegeben, so gilt für das entsprechende Ideal eines andern Ringes die Darstellung, die man erhält, wenn man überall die Komponenten durch die entsprechenden ersetzt. Der Charakter dieser neuen Zerlegung ist in jeder Einzelheit derselbe wie der der Ausgangsdarstellung.

2. Weiter ordnen sich hier die Dedekindschen Ergebnisse[36]) über die regulären Ideale von Zahlkörperordnungen ein. In der Hauptordnung $\mathfrak{S}$ eines endlichen algebraischen Zahlkörpers läßt sich jedes Ideal eindeutig darstellen als Produkt von Primidealpotenzen. Bedeutet nun $\mathfrak{T}$ eine Unterordnung von $\mathfrak{S}$ mit demselben Quotientenkörper wie $\mathfrak{S}$, und wird der Führer $\mathfrak{T} : \mathfrak{S} = \mathfrak{f}$ gesetzt, so überträgt sich die soeben erwähnte Zerlegung auf die zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Ideale aus $\mathfrak{T}$: Ist in $\mathfrak{S}$ erfüllt $\mathfrak{M} + \mathfrak{f} = \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_1^{\varrho_1} \ldots \mathfrak{P}_s^{\varrho_s}$, so wird in $\mathfrak{T}$, wenn überall zu den Verengungsidealen übergegangen wird, $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_1^{\varrho_1} \ldots \mathfrak{p}_s^{\varrho_s}$; und umgekehrt entsprechend.

[35]) Siehe E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Annalen 83 (1921), S. 24–66.

[36]) Vgl. Fußnote 5, § 5 der dort erwähnten Arbeit.

§ 8.

Führerzerlegung und Ringkonstitution.

Das zugrunde gelegte System S bestehe aus einem Ring Σ und einem echten Unterring P, der das Einheitselement von Σ enthält. In allen Ringen zwischen P und Σ kann man dann von zueinander teilerfremden Idealen reden.

Zwischen der idealtheoretischen Zerfällung des Führers $\mathsf{P}:\Sigma=\mathfrak{f}$ und der Konstitution der Ringe P und Σ besteht ein enger Zusammenhang, der seinen Ausdruck findet in dem

Zerlegungssatz. *In* P *gelte für* $\mathfrak{f}$ *eine Darstellung als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches oder Produkt*[37]) *endlich vieler, aber mindestens zweier paarweise teilerfremder, vom Einheitsideal* P *verschiedener Ideale,* $\mathfrak{f}=\mathfrak{g}_1-\ldots-\mathfrak{g}_k=\mathfrak{g}_1\ldots\mathfrak{g}_k$ *mit* $\mathfrak{g}_i+\mathfrak{g}_j=\mathsf{P}$ *für* $i\neq j$. $\mathfrak{f}_i$ *bezeichne das Erweiterungsideal von* $\mathfrak{g}_i$ *bez.* Σ, $\mathfrak{f}_i'=\mathfrak{f}_1-\ldots-\mathfrak{f}_{i-1}-\mathfrak{f}_{i+1}-\ldots-\mathfrak{f}_k$ *die Komplementärkomponente von* $\mathfrak{f}_i$, *entsprechend* $\mathfrak{g}_i'=\mathfrak{g}_1-\ldots-\mathfrak{g}_{i-1}-\mathfrak{g}_{i+1}-\ldots-\mathfrak{g}_k$ *die von* $\mathfrak{g}_i$.

Dann wird P *darstellbar als direkter Durchschnitt bez.* Σ *von* k *Ringen* $\mathsf{T}_1,\ldots,\mathsf{T}_k$ *und infolge des Dualismus* (§ 2, 1) Σ *als direkte Summe bez.* P *der* k *Ringe* $\mathsf{T}_i=\mathsf{T}_1-\ldots-\mathsf{T}_{i-1}-\mathsf{T}_{i+1}-\ldots-\mathsf{T}_k$.

Es werden die Führer $\mathsf{T}_i:\Sigma=\mathfrak{f}_i$, *die Führer* $\mathsf{P}:\mathsf{T}_i=\mathfrak{g}_i$ $(i=1,\ldots,k)$.

Der Beweis des Satzes benutzt neben dem 1. distributiven Gesetz vor allem den Satz 3 aus § 2, 1 sowie die Folgerungen zu den dortigen Sätzen 5 und 6.

Zunächst nun besteht der

Hilfssatz 1. Gelten für ein Ideal $\mathfrak{a}$ eines Ringes mit Einheitselement zwei Darstellungen durch paarweise teilerfremde Komponenten, $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1\ldots\mathfrak{a}_k=\bar{\mathfrak{a}}_1\ldots\bar{\mathfrak{a}}_k$, derart, daß $\mathfrak{a}_i\geqq\bar{\mathfrak{a}}_i$ ist, so wird $\mathfrak{a}_i=\bar{\mathfrak{a}}_i$ $(i=1,\ldots,k)$.

Beweis. Da für $i\neq j$ das Ideal $\mathfrak{a}_i$ zu $\bar{\mathfrak{a}}_j$ teilerfremd ist, folgt die Behauptung wegen $\bar{\mathfrak{a}}_k\ldots\bar{\mathfrak{a}}_k\geqq\mathfrak{a}_i$.

Man hat in Σ für den Führer $\mathfrak{f}=\mathfrak{f}_1\ldots\mathfrak{f}_k=\mathfrak{f}_1-\ldots-\mathfrak{f}_k$ mit $\mathfrak{f}_i+\mathfrak{f}_j=\Sigma$ für $i\neq j$. Keine der Komponenten $\mathfrak{f}_i$ ist mit Σ identisch. Sonst nämlich hätte man wegen $\mathfrak{g}_i\geqq\mathfrak{f}_i-\mathsf{P}$ und $\mathfrak{f}=\mathfrak{f}-\mathsf{P}=(\mathfrak{f}_1-\mathsf{P})-\ldots-(\mathfrak{f}_k-\mathsf{P})$ nach Hilfssatz 1 wenigstens eine mit P identische Komponente $\mathfrak{g}_i$, gegen die Voraussetzung. Geht man überall zum Restklassensystem nach $\mathfrak{f}$ über und deutet diesen Prozeß durch Klammern an, so hat man in $\Sigma|\mathfrak{f}=(\Sigma)$ für das Nullideal

$$(0)=(\mathfrak{f}_1)\dot{-}\ldots\dot{-}(\mathfrak{f}_k),\text{ direkter Durchschnitt bez. }(\Sigma),$$

[37]) Die Vielfachen- und Produktdarstellung sind nach N. § 4, 4 δ identisch.

also wegen des Dualismus

$$(\Sigma) = (\mathfrak{f}_1') + \ldots + (\mathfrak{f}_k'), \text{ direkte Summe bez. } (0).$$

Zur Anwendung von Satz 3 aus § 2, 1 wird gesetzt $\mathfrak{G} = \mathsf{P}\,\mathfrak{f} = (\mathsf{P})$. Es gilt dann

$$(\mathsf{P})_{(\mathfrak{f}_1')} + \ldots + (\mathsf{P})_{(\mathfrak{f}_k')} = ((\mathsf{P}) + (\mathfrak{f}_1)) - \ldots - ((\mathsf{P}) + (\mathfrak{f}_k)).$$

Es sind die $(\mathsf{P})_{(\mathfrak{f}_j')}$ genauer zu bestimmen. Wie oben für (Σ) ergibt sich aus $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}_1 - \ldots - \mathfrak{g}_k$ für (P) die Darstellung $(\mathsf{P}) = (\mathfrak{g}_1') + \ldots + (\mathfrak{g}_k')$. Berücksichtigt man, daß für $i \neq j$ erfüllt ist $\mathfrak{g}_j' \geqq \mathfrak{g}_i \geqq \mathfrak{f}_i$, so erhält man hieraus $(\mathsf{P}) + (\mathfrak{f}_i) = (\mathfrak{g}_i') + (\mathfrak{f}_i)$. Wegen $\mathfrak{g}_i' \geqq \mathfrak{f}_i'$ folgt dann nach dem 1. distributiven Gesetz

$$\begin{aligned}(\mathsf{P})_{(\mathfrak{f}_i')} = (\mathfrak{f}_i') - ((\mathsf{P}) + (\mathfrak{f}_i)) &= (\mathfrak{f}_i') - ((\mathfrak{g}_i') + (\mathfrak{f}_i)) \\ &= (\mathfrak{g}_i') + ((\mathfrak{f}_i) - \mathfrak{f}_i')) = (\mathfrak{g}_i') + (\mathfrak{f}) = (\mathfrak{g}_i'),\end{aligned}$$

also

$$(\mathsf{P})_{(\mathfrak{f}_1')} + \ldots + (\mathsf{P})_{(\mathfrak{f}_k')} = (\mathfrak{g}_1') + \ldots + (\mathfrak{g}_k') = (\mathsf{P})\ ^{38}).$$

Somit wird $(\mathsf{P}) = ((\mathsf{P}) + (\mathfrak{f}_1)) - \ldots - ((\mathsf{P}) + (\mathfrak{f}_k))$, also kommt durch Auflösen der Klassen $\mathsf{P} = (\mathsf{P} + \mathfrak{f}_1) - \ldots - (\mathsf{P} + \mathfrak{f}_k)$. $\mathsf{T}_i = \mathsf{P} + \mathfrak{f}_i$ ist wegen $\mathsf{T}_i^2 \geqq \mathsf{T}_i$ Ring. Nach der Folgerung 3 aus § 2, 1 und nachfolgender Anwendung des I. Isomorphiesatzes ist dieser Durchschnitt ein direkter bez. Σ, wenn die Komponenten T_i als von Σ verschieden nachgewiesen werden, und dann wird auch für $\mathsf{T}_i' = \mathsf{T}_1 - \ldots - \mathsf{T}_{i-1} - \mathsf{T}_{i+1} - \ldots - \mathsf{T}_k$ der Ring $\Sigma = \mathsf{T}_1' + \ldots + \mathsf{T}_k'$ direkte Summe bez. P. Um also $\mathsf{T}_i \neq \Sigma$ nachzuweisen und zugleich die weiteren Behauptungen des Satzes zu erledigen, beweist man den

Hilfssatz 2. Sind $\mathsf{M}_1, \ldots, \mathsf{M}_n$ Unterringe von Σ und der Führer von M_i nach Σ das Ideal $\mathfrak{m}_i = \mathsf{M}_i : \Sigma$, so wird der des Durchschnittsringes $\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 - \ldots - \mathsf{M}_n$ gegeben durch $\mathsf{M} : \Sigma = \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 - \ldots - \mathfrak{m}_n$.

Beweis. Setzt man $\mathfrak{m}_1 - \ldots - \mathfrak{m}_n = \mathfrak{v}$, so ist $\mathfrak{v}$ als Ideal aus Σ in M sicher Vielfaches von $\mathsf{M} : \Sigma = \mathfrak{m}$. Zum andern wird für jedes i erfüllt $\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{m}_i$, also kommt $\mathfrak{m} = \mathfrak{v}$, w. z. b. w.

Bezeichnet nun $\mathfrak{t}_i$ den Führer $\mathsf{T}_i : \Sigma$, so ist zunächst $\mathfrak{f}_i \geqq \mathfrak{t}_i$, da ja $\mathfrak{f}_i$ Ideal aus Σ in T_i ist. Nach dem Hilfssatz 2 und wegen $\mathsf{P} = \mathsf{T}_1 - \ldots - \mathsf{T}_k$ wird $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1 - \ldots - \mathfrak{f}_k = \mathfrak{t}_1 - \ldots - \mathfrak{t}_k$, also nach Hilfssatz 1 schließlich $\mathfrak{f}_i = \mathfrak{t}_i$, $(i = 1, \ldots, k)$. Damit ist auch $\mathsf{T}_i \neq \Sigma$ bewiesen, weil für $\mathsf{T}_i = \Sigma$ sein müßte $\mathsf{T}_i : \Sigma = \Sigma = \mathfrak{f}_i$, gegen früher Bewiesenes. Somit wird wirklich

---

[38]) Nach Satz 3 aus § 2, 1 läßt sich zunächst nur $(\mathsf{P}) \geqq (\mathsf{P})_{(\mathfrak{f}_1')} + \ldots + (\mathsf{P})_{(\mathfrak{f}_k')}$ aussagen.

$\mathsf{P} = \mathsf{T}_1 \dotplus \ldots \dotplus \mathsf{T}_k$ direkter Durchschnitt bez. Σ und $\Sigma = \mathsf{T}_1' + \ldots + \mathsf{T}_k'$ direkte Summe bez. P.

Es bleibt noch $\mathsf{P} : \mathsf{T}_i = \mathfrak{g}_i'$ nachzuweisen. Zunächst ist wegen $\mathfrak{g}_i'(\mathsf{P} + \mathfrak{f}_i) = \mathfrak{g}_i' + \mathfrak{f} = \mathfrak{g}_i'$ dieses Ideal aus P auch eines in T_i, es wird also $\mathfrak{g}_i' \geqq \mathfrak{t}_i = \mathsf{P} : \mathsf{T}_i$. Zum andern aber hat man nach § 1, Satz 9

$$\bar{\mathfrak{t}}_i = \mathsf{P} : \mathsf{T}_i = \mathsf{P} : (\mathsf{P} + \mathfrak{f}_i) = (\mathsf{P} : \mathsf{P}) - (\mathsf{P} : \mathfrak{f}_i) = \mathsf{P} - (\mathsf{P} : \mathfrak{g}_i \Sigma) = \mathsf{P} - (\mathfrak{f} : \mathfrak{g}_i),$$

d. h. $\bar{\mathfrak{t}}_i \geqq \mathfrak{f} : \mathfrak{g}_i$, also $\bar{\mathfrak{t}}_i \cdot \mathfrak{g}_i \geqq \mathfrak{f} \geqq \mathfrak{g}_i'$, und daraus wegen $\mathfrak{g}_i + \mathfrak{g}_i' = \mathsf{P}$ weiter $\bar{\mathfrak{t}}_i \geqq \mathfrak{g}_i'$, somit $\bar{\mathfrak{t}}_i = \mathfrak{g}_i'$, w. z. b. w. Damit ist der Satz völlig bewiesen.

Aus dem Zerlegungssatz lassen sich noch einige Folgerungen ziehen.

Folgerung 1. *Bezeichnet $\nu_1, \ldots, \nu_m$ eine beliebige Kombination von m verschiedenen Zahlen der Reihe $1, \ldots, k$, und setzt man $\mathsf{T}_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \mathsf{T}_{\nu_1} - \ldots - \mathsf{T}_{\nu_m}$, $\mathfrak{f}_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \mathfrak{f}_{\nu_1} - \ldots - \mathfrak{f}_{\nu_m}$, sowie $\mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m}'$ gleich dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der von $\mathfrak{g}_{\nu_1}, \ldots, \mathfrak{g}_{\nu_m}$ verschiedenen Ideale $\mathfrak{g}_j$, so wird $\mathsf{T}_{\nu_1 \ldots \nu_m} : \Sigma = \mathfrak{f}_{\nu_1 \ldots \nu_m}$, $\mathsf{P} : \mathsf{T}_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m}'$.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt aus Hilfssatz 2; den zweiten beweist man genau so wie $\mathsf{P} : \mathsf{T}_i = \mathfrak{g}_i'$, in dem nun überall an Stelle von $\mathsf{T}_i, \mathfrak{f}_i, \mathfrak{g}_i'$ tritt $\mathsf{T}_{\nu_1 \ldots \nu_m}, \mathfrak{f}_{\nu_1 \ldots \nu_m}, \mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m}'$.

Folgerung 2. *Es gelten die Restklassenringisomorphien*

$$\mathsf{T}_{\nu_1 \ldots \nu_m} \,|\, \mathfrak{f}_{\nu_1 \ldots \nu_m} \simeq \mathsf{P} \,|\, \mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m} \text{ und } \mathsf{T}_{\nu_1 \ldots \nu_m} \,|\, \mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m}' \simeq \Sigma \,|\, \mathfrak{f}_{\nu_1 \ldots \nu_m}',$$

wenn $\mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m}$ und $\mathfrak{f}_{\nu_1 \ldots \nu_m}'$ entsprechend wie $\mathfrak{f}_{\nu_1 \ldots \nu_m}$ und $\mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m}'$ definiert ist.

Beweis. Unter Zuhilfenahme von Hilfssatz 1 erkennt man, daß das Erweiterungsideal von $\mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m}$ bez. $\mathsf{T}_{\nu_1 \ldots \nu_m}$ gleich wird $\mathfrak{f}_{\nu_1 \ldots \nu_m}$. Man hat nämlich die Beziehung $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m} \cdot \mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m}' = (\mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m} \cdot \mathsf{T}_{\nu_1 \ldots \nu_m}) \cdot \mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m}' = \mathfrak{f}_{\nu_1 \ldots \nu_m} \cdot \mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m}'$ mit $\mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m} \cdot \mathsf{T}_{\nu_1 \ldots \nu_m} \geqq \mathfrak{f}_{\nu_1 \ldots \nu_m}$. Somit folgt aus $\mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m} + \mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m}' = \mathsf{P}$ und $\mathsf{P} : \mathsf{T}_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \mathfrak{g}_{\nu_1 \ldots \nu_m}'$ der erste Teil der Behauptung nach § 7, Hilfssatz 1; die andere Hälfte erledigt sich entsprechend [39]).

Als Sonderfall dieses Zerlegungssatzes ergibt sich der nachstehende von Furtwängler aufgestellte Satz [40]): $\mathfrak{S}$ bezeichne die Hauptordnung eines endlichen algebraischen Zahlkörpers, $\mathfrak{T}$ eine Unterordnung von $\mathfrak{S}$. Zerlegt man dann in $\mathfrak{S}$ den Führer $\mathfrak{f} = \mathfrak{T} : \mathfrak{S}$ derart in Komponenten $\mathfrak{f}_i$, daß

[39]) Dieser Satz bildet zusammen mit den Resultaten des § 7 ein wesentliches Hilfsmittel, um den Prozeß der Erweiterung beliebiger Ideale aus P nach Σ oder den der Verengung beliebiger Ideale aus Σ nach P in den Zwischenringen von P und Σ genauer zu verfolgen. Unter Annahme von Endlichkeitsvoraussetzungen, die dem Doppelkettensatz ähneln, hat W. Krull mit ringtheoretischen Methoden hierher gehörige Untersuchungen durchgeführt; eine betreffende Arbeit wird bald erscheinen.

[40]) Vgl. Fußnote 12.

deren Normen paarweise teilerfremd sind, so sind auch die $\mathfrak{f}_i$ Führer $\mathfrak{f}_i = \mathfrak{T}_i : \mathfrak{S}$ nach Unterordnungen $\mathfrak{T}_i$ von $\mathfrak{S}$.

Denn die Normen $N(\mathfrak{f}_i)$ sind teilbar durch die Komponenten $\mathfrak{f}_i$ und als rationale Zahlen Elemente jeder Unterordnung von $\mathfrak{S}$. Somit werden in $\mathfrak{T}$ die Verengungsideale $\mathfrak{t}_i = \mathfrak{f}_i - \mathfrak{T}$, also auch in $\mathfrak{S}$ deren Erweiterungsideale $\mathfrak{t}_i \cdot \mathfrak{S}$, paarweise teilerfremd. Nach Hilfssatz 1 aber folgt aus $\mathfrak{t}_i \cdot \mathfrak{S} \geqq \mathfrak{f}_i$ weiter $\mathfrak{t}_i \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{f}_i$ und dann aus dem Zerlegungssatz die Furtwänglersche Behauptung.

Die vorliegenden Entwicklungen bauen weiter auf der Arbeit von E. Noether, „Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern“[1]) und meiner eigenen früheren „Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe“[2]). Im besonderen handelt es sich um eine Anwendung der in diesen beiden Arbeiten gegebenen Resultate auf *beliebige* endliche Ordnungen[3]) algebraischer Zahlkörper und damit um eine Anknüpfung an den im Eingange meiner ersten Arbeit umrissenen Fragenkreis.

Waren aber dort die betrachteten Idealkörper (G. § 1) frei von jeder Endlichkeitsvoraussetzung, so hat man es hier zu tun mit Bereichen, die aus der *Gesamtheit der Ideale einer endlichen Ordnung* bestehen. In ihnen ist nach N. §§ 2, 3 der *Doppelkettensatz mod. den vom Nullideal verschiedenen Idealen* erfüllt (vgl. N. Einleitung). Es besteht demnach die in N. § 7 gegebene Idealtheorie mit der eindeutigen Zerlegung eines Ideals in endlich viele paarweise teilerfremde, größte primäre Komponenten. Nach N. § 10 ist die Gültigkeit des Doppelkettensatzes identisch mit der Existenz einer *Kompositionsreihe von Idealen* nach jedem vom Nullideal verschiedenen Ideal $\mathfrak{m}$. Bedeutet $\mathfrak{o}$ das Einheitsideal der betreffenden Ordnung, so sind zwar nicht die Einzelglieder $\mathfrak{m}_\nu$ einer solchen

---

[1]) E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen 96 (1926), S. 26—61; zitiert mit N.

[2]) H. Grell, Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe, Math. Annalen 97 (1927), S. 490—523; zitiert mit G.

[3]) Unter einer endlichen *Ordnung* versteht man mit Dedekind jeden Ring aus ganzen algebraischen Zahlen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers, der den Ring der ganzen rationalen Zahlen umfaßt, unter der *Hauptordnung* den *aller* ganzen algebraischen Zahlen des betreffenden Körpers.

Reihe $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\nu, \ldots, \mathfrak{m}_\lambda$, $\mathfrak{o}$ eindeutig bestimmt, wohl aber ist es nach dem Jordan-Hölderschen Satz die Anzahl der von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Glieder, die *Länge des Ideals* $\mathfrak{m}$.

Durch Kombination mit Begriffen und Sätzen der verallgemeinerten Abelschen Gruppen erhält man hieraus für die erwähnten Bereiche eine *Theorie des Grades und der Norm von Idealen* (§§ 3, 4). Sie schließt die von Dedekind nur für die Hauptordnung[3]) entwickelte ein. Insbesondere wird der Grad eines Ideals gleich der Summe der Gradzahlen seiner Primärkomponenten, der Grad eines Primärideals gleich dem Produkt aus der Länge des Primärideals und dem Grad des zugehörigen Primideals. Entsprechende Sätze beherrschen die Zusammensetzung der Normen. Die Theorie des Grades der Ideale einer beliebigen Ordnung wird entwickelt in bezug auf jede Unterordnung dieser Ordnung, die Normentheorie für die Ideale einer beliebigen Ordnung nicht nur bezüglich des Hauptidealringes der ganzen rationalen Zahlen, sondern auch in bezug auf jeden in dieser Ordnung enthaltenen Ring, der aus allen ganzen algebraischen Zahlen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers besteht, d. h. also, auch für „Relativ"ordnungen in „Relativ"körpern. Letzteres gelingt durch Heranziehen des Hilfsmittels der Quotientenringe (§ 2). Die ersten Ansätze zur Normentheorie in „Relativ"ordnungen finden sich in der Dedekindschen Arbeit „Über eine Erweiterung des Symbols $(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ in der Theorie der Moduln"[4]). Abgesehen von dem in der vorliegenden Arbeit erreichten weitergehenden Resultat ist auch der hier eingeschlagene Weg wesentlich gangbarer als der Dedekinds, über den dieser sich am Schluß des § 4 (S. 199) seiner Arbeit so äußert: „Immerhin bleibt die eine wie die andere Definition von $(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ hinsichtlich ihrer Einfachheit außerordentlich weit zurück hinter der Definition des alten Symbols $(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$, welche sich unmittelbar auf die Betrachtung der in den Moduln $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ enthaltenen Zahlen stützt. Nachdem ich seit vielen Jahren eine ähnliche Vereinfachung vergeblich gesucht habe, kann ich nur noch den Wunsch aussprechen, daß es einem anderen gelingen möge, eine solche zu finden."

Das Hilfsmittel der Quotientenringe erlaubt ferner, die in der Theorie der algebraischen Zahlen unter dem Titel „Ideale in verschiedenen Körpern"[5]) bekannten Sätze, die die Beziehungen der Ideale der Hauptordnung P eines Zahlkörpers $\mathfrak{K}$ und der Hauptordnung Σ einer endlichen Erweiterung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$ regeln, von der Hauptordnung Σ auf eine beliebige „Relativ"ordnung T aus Σ auszudehnen.

---

[4]) Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften 1895, S. 183–208. Auf diese Arbeit wies mich nachträglich E. Noether hin.

[5]) Vgl. Hilbert, Zahlbericht, Anmerkung zu S. 204 auf S. 536; ausführlicher Hecke, Theorie der algebraischen Zahlen, § 37.

Weiterhin liefern vorzüglich die beiden letzten Paragraphen der ersten Arbeit (G.) neue Aufschlüsse. Zunächst gelingt die genaue *Bestimmung der allgemeinen Primideale* in jeder endlichen Ordnung T eines algebraischen Zahlkörpers. Nach N. § 9 nämlich existiert in jeder solchen Ordnung, die in ihrem Quotientenkörper $Q(\mathsf{T})$ nicht ganz abgeschlossen ist, wenigstens ein Primideal, dessen zugehörige Primärideale aus ihm nicht sämtlich durch Potenzierung zu erreichen sind. Diese Primideale sollen als allgemeine, die übrigen als spezielle bezeichnet werden. Auf ihr Vorhandensein hat schon Dedekind hingewiesen[6]). Die damit aufgeworfene Frage findet ihre Erledigung in dem Satz, daß alle und nur die Primideale aus T allgemein sind, die im Führer von T nach dem Ring Σ aller ganzen algebraischen Zahlen aus $Q(\mathsf{T})$ aufgehen (§ 6).

Zwei weitere Anwendungen der §§ 7, 8 in G. ergeben sich durch Verbindung mit dem Gradbegriff. In jeder „Relativ"ordnung T lassen sich zunächst die vom Nullideal verschiedenen *Ideale, die Führer nach einer Unterordnung* T' *sind*, charakterisieren: dann und nur dann nämlich ist ein solches Ideal $\mathfrak{f}$ Führer, wenn für ein beliebiges zugehöriges Primideal $\mathfrak{p}$ vom Relativgrad 1 das durch $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}:\mathfrak{p}$ im Grundbereich von T bestimmte Verengungsideal (G. § 3) beidemal dasselbe ist. Der von Dedekind in einer Fußnote zur Diskriminantenarbeit[7]) für die Hauptordnung von Zahlkörpern ohne Beweis ausgesprochene Satz ist hierdurch eingeordnet und erheblich erweitert. Aus der Annahme, daß die Zerfällungen sämtlicher rationaler Primzahlen in der Hauptordnung bekannt sind, ergeben sich daraus unter Benutzung von G. § 8 die Furtwänglerschen expliziten Darstellungen der Führerideale[7a]) (§ 5).

Als zweite Anwendung der Gradtheorie bekommt man den *Kompositionsreihensatz* des § 6. Er bildet die abstrakte Fassung der aus der algebraischen Geometrie bekannten Auflösung der Singularitäten. Man kann nämlich diese Auflösungstheorie auffassen als Übergang von den Idealen einer endlichen Ordnung T zu den Erweiterungsidealen in der Hauptordnung Σ des zu T gehörigen Quotientenkörpers $Q(\mathsf{T})$. Unter Benutzung dieser Auffassung gab B. L. v. d. Waerden den in Fußnote [30]) mitgeteilten Rangsatz, der — geometrisch gesprochen — die Gleichheit zweier verschieden definierten Vielfachheitszahlen[8]) behauptet. Seine abstrakte

[6]) Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, III. Aufl., § 172, S. 522 (zitiert mit Z III, die IV. Auflage entsprechend mit Z IV).

[7]) R. Dedekind, Über die Diskriminanten endlicher Körper, Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften **29** (1882), Fußnote zu S. 28.

[7a]) Ph. Furtwängler, Über die Führer von Zahlringen, Wiener Berichte **128** (1919), S. 239–245, Satz 4.

[8]) Siehe hierzu B. L. v. d. Waerden, De algebraische grondslagen der meetkunde van het aantal, Diss. Amsterdam 1926, § 5.

Verallgemeinerung ist der erwähnte Kompositionsreihensatz. Sein Beweis vollzieht sich, indem man die störenden mehrfachen „Singularitäten" einer Ordnung mittels des Zerlegungssatzes aus G. § 8 in einzelne, leichter zu bewältigende auflöst.

Die bisher besprochenen Tatsachen gelten gleicherweise für die endlichen Ordnungen algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen, sowie die andern in N. § 3 erwähnten, den Zahlkörperordnungen verwandten Ringe. Wie in N. werden die Beweise der vorliegenden Arbeit mit den Methoden der abstrakten Arithmetik und Algebra und damit gleichzeitig für alle in Betracht kommenden Bereiche geführt.

Alle in dieser Arbeit behandelten Ringe besitzen ein Einheitselement und sind bis auf die Restklassenringe nach gewissen Idealen sämtlich nullteilerfrei.

§ 1.

Ringe mit Doppelkettensatz. Verallgemeinerte Abelsche Gruppen.

1. Ordnungen. Σ sei ein nullteilerfreier Ring, dessen Einheitselement e in dem Unterring P liegt. Wie in N. § 1, 2 heißt ein in Σ gelegener, P umfassender Ring T eine P-Ordnung. T heißt *endliche* P-Ordnung, falls er ein endlicher P-Modul ist. Die Definition und Theorie der P-*ganzen Elemente* aus Σ ist in N. § 1, 3 gegeben. In dieser Arbeit wird benutzt der dort ausgesprochene *Hilfssatz* 1: Alle Elemente einer endlichen P-Ordnung T aus Σ sind P-ganz. — Überdies sei noch auf den Begriff der ganzen Abgeschlossenheit verwiesen (N. § 1, 4).

Weiter wird benötigt der

Hilfssatz 2. $\mathfrak{M}$ sei ein endlicher und vom Nullmodul verschiedener P-Modul in Σ, $\mathfrak{N}$ ein P-Modul und Unterring von Σ, sowie $\mathfrak{M}\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$. Dann wird $e \equiv 0\,(\mathfrak{N})$.

Der Beweis vollzieht sich genau so wie der des Hilfssatzes in N. § 8, 1.

Und ferner hat man den

Satz 1.[9]) *Ist in* P mod. *den vom Nullideal verschiedenen Idealen der Doppelkettensatz erfüllt und* Σ *eine endliche* (*nullteilerfreie*) P-*Ordnung, so besteht er gleicherweise in jeder* P-*Ordnung* T *aus* Σ.

---

[9]) Beim Beweise des Satzes wurde ich von E. Noether unterstützt. In N. § 3, 2 ist der Beweis des Satzes geführt unter der Annahme, daß der Quotientenkörper von Σ eine endliche Erweiterung *erster Art* des Quotientenkörpers von P darstellt, indem benutzt wird, daß das System der P-ganzen Elemente aus $Q(\Sigma)$ ein endlicher P-Modul ist. Diese letztere Tatsache hat K. F. Schmidt bei weiteren einschränkenden Annahmen für P auch dann nachweisen können, wenn $Q(\Sigma)$ beliebige endliche Erweiterung von $Q(\mathsf{P})$ bedeutet, und einen noch weitergehenden Schritt in dieser Rich-

Beweis. Nach dem *Modulsatz* aus N. § 2 gilt in Σ der Teilerkettensatz für P-Moduln. Deshalb besteht er insbesondere für die Ideale der P-Ordnung T, und T hat eine endliche Modulbasis $\tau_1', \ldots, \tau_m'$. Um mod. einem vom Nullideal verschiedenen Ideal $\mathfrak{C}$ aus T das Erfülltsein des Vielfachenkettensatzes zu beweisen, genügt nach der *Folgerung des Modulsatzes* (N. § 2) der Nachweis, daß die $\mathfrak{C}$ in bestimmter Weise zugeordneten Ideale $\mathfrak{c}_i$ aus P vom Nullideal verschieden sind. Ganz ähnlich wie in N. § 3, 2 geschieht das so: Bezeichnet $\mathfrak{K} = Q(\mathsf{P})$ den Quotientenkörper von P und $\tau_1, \ldots, \tau_n$ ein größtes bez. $\mathfrak{K}$ linear irreduzibles System aus T, so hat man für $i = 1, \ldots, m$ Relationen $\tau_i' \cdot c_i = c_{i1}\tau_1 + \ldots + c_{in}\tau_n$ mit Koeffizienten $c_i \neq 0$ und c_{ij} aus P. Setzt man $c = c_1 \ldots c_m$, sowie $\alpha_i = \frac{\tau_i}{c}$, so liegt T in dem aus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ abgeleiteten P-Modul. $\mathfrak{C} \neq (0)$ ist bez. $\mathfrak{K}$ vom gleichen Rang wie T. Bezeichnet also $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ ein größtes bez. $\mathfrak{K}$ linear irreduzibles System aus $\mathfrak{C}$, so hat man Relationen $\alpha_i = a_{i1}\gamma_1 + \ldots + a_{in}\gamma_n$ mit Koeffizienten a_{ij} aus $\mathfrak{K}$, also für geeignetes $a_i \neq 0$ aus P weiter $a_i\alpha_i \equiv 0\,(\mathfrak{C})$; auf Grund der Unabhängigkeit der α_i gehören die a_i den $\mathfrak{c}_i$ an, die also vom Nullideal verschieden sind.

2. Ringe mit Doppelkettensatz. Für *Ringe mit Gültigkeit des Doppelkettensatzes mod. den vom Nullideal verschiedenen Idealen* besteht die in N. § 6 und § 7 entwickelte Idealtheorie mit ihrem Hauptsatz (Satz V, N. § 7): *Jedes Ideal aus Σ ist entweder selbst primär oder läßt sich eindeutig darstellen als Produkt endlich vieler, paarweise teilerfremder, größter primärer Komponenten, die sämtlich vom Einheitsideal verschieden sind*[10]). Ein vom Null- und Einheitsideal verschiedenes Primideal besitzt keinen vom Einheitsideal verschiedenen echten Teiler.

Definition 1. Ein Ideal $\mathfrak{b}$ heißt *unmittelbarer Teiler* eines Ideals $\mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ ist und kein von beiden verschiedenes Ideal $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{a} > \mathfrak{c} > \mathfrak{b}$ existiert.

Nach N. § 10 gibt es in Σ zu jedem vom Nullideal verschiedenen Ideal $\mathfrak{a}$ unter Annahme einer Wohlordnung der Ideale wenigstens eine

---

tung bedeutet die Note von Artin-v. d. Waerden; ob aber das System der P-ganzen Elemente aus $Q(\Sigma)$ allgemein ein endlicher P-Modul wird, ist bisher unentschieden (vgl. K. F. Schmidt, Danziger Vortrag, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung **34** (1926), S. 144 der schrägen Paginierung; Artin-v. d. Waerden, Die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen, Göttinger Nachrichten 1926).

[10]) Der Kürze halber soll im folgenden auch stets dann von einer Produktdarstellung gesprochen werden, wenn das Ideal selbst primär ist, also nur eine einzige Komponente auftritt. Bei den Beweisen aller entsprechenden Sätze ist dieser Fall nicht besonders unterschieden; die dazu notwendigen geringfügigen Abänderungen sind jedesmal ohne Schwierigkeit vorzunehmen.

Kompositionsreihe[11]) von Idealen, d. h. wenigstens ein System von Idealen $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\lambda, \Sigma$, derart, daß jedes unmittelbarer Teiler des vorangehenden ist. Die *Länge*[12]) λ als Anzahl der vom Einheitsideal Σ verschiedenen Ideale $\mathfrak{a}_\nu$ ist hierbei nach dem Jordan-Hölderschen Satz stets dieselbe, also eine allein durch das Ideal $\mathfrak{a}$ bestimmte nicht negative ganze Zahl. — Im Anschluß hieran bestehen die folgenden Tatsachen.

Satz 2. *Jeder unmittelbare Teiler $\mathfrak{a}$ eines Primärideals $\mathfrak{q}$ mit endlichem Exponenten ϱ und $\mathfrak{p}$ als zugehörigem Primideal ist Vielfaches von $\mathfrak{q} : \mathfrak{p}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p}^0 = \Sigma$ gesetzt. Wegen $\mathfrak{q} : \mathfrak{p}^0 = \mathfrak{q} > \mathfrak{a} \geqq \mathfrak{q} : \mathfrak{p}^\varrho = \Sigma$ gibt es einen kleinstmöglichen Exponenten σ, so daß $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{q} : \mathfrak{p}^\sigma$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{q} : \mathfrak{p}^{\sigma-1}$ wird. Man hat also $\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\sigma-1} < \mathfrak{q}$, und da $\mathfrak{a}$ unmittelbarer Teiler von $\mathfrak{q}$ ist, wegen $\mathfrak{q} + \mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\sigma-1} \geqq \mathfrak{a}$ weiter $\mathfrak{a} = \mathfrak{q} + \mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\sigma-1}$. Demnach kommt $\mathfrak{a}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}\mathfrak{p} + \mathfrak{a}\mathfrak{p}^\sigma$ nach dem zweiten distributiven Gesetz, somit $\mathfrak{a}\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{q}$ und daraus $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{q} : \mathfrak{p}$, w. z. b. w.

Satz 3. *Das vom Einheitsideal verschiedene Primärideal $\mathfrak{q}$ besitze $\mathfrak{p}$ als zugehöriges Primideal und $\mathfrak{q}'$ als unmittelbaren Teiler. Dann gilt für jedes Element $\varkappa \equiv 0 (\mathfrak{q}')$, $\not\equiv 0 (\mathfrak{q})$ die Beziehung $\varkappa\Sigma - \mathfrak{q} = \varkappa\mathfrak{p}$.*

Beweis. Nach Satz 2 ist $\mathfrak{q}' \geqq \mathfrak{q} : \mathfrak{p}$, also $\varkappa\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{q}$ und somit auch $\varkappa\mathfrak{p} \geqq \varkappa\Sigma - \mathfrak{q}$. Wäre $\varkappa\mathfrak{p} > \varkappa\Sigma - \mathfrak{q}$, so hätte man in Σ die Existenz eines Elementes σ mit $\sigma\varkappa \equiv 0 (\mathfrak{q})$ und $\sigma \not\equiv 0 (\mathfrak{p})$. Demnach wäre das Hauptideal $\sigma\Sigma$ zu $\mathfrak{p}$, also auch zu $\mathfrak{q}$ teilerfremd, und aus $\sigma\varkappa\Sigma \geqq \mathfrak{q}$ würde gegen die Voraussetzung $\varkappa \equiv 0 (\mathfrak{q})$ folgen.

Man zieht daraus die

Folgerung. *Der Restklassenmodul $\mathfrak{q}' | \mathfrak{q}$ ist modulisomorph dem Restklassenmodul $\Sigma | \mathfrak{p}$, und als Repräsentanten von $\mathfrak{q}' | \mathfrak{q}$ können die mit einem beliebigen $\varkappa \equiv 0 (\mathfrak{q}')$, $\not\equiv 0 (\mathfrak{q})$ multiplizierten Repräsentanten von $\Sigma | \mathfrak{p}$ genommen werden.*

Beweis. Für alle diese $\varkappa$ wird $\varkappa\Sigma + \mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$, also nach dem II. Isomorphiesatz (G. § 2, 2) $\mathfrak{q}' | \mathfrak{q} \sim \varkappa\Sigma | \varkappa\Sigma - \mathfrak{q} = \varkappa\Sigma | \varkappa\mathfrak{p}$. Wegen der Nullteilerfreiheit von Σ folgt daraus die Behauptung.

Die bisherigen Entwicklungen gelten nach Satz 1 im besonderen in allen endlichen nullteilerfreien P-Ordnungen Σ, für deren Grundbereich P mod. den vom Nullideal verschiedenen Idealen der Doppelkettensatz erfüllt ist.

---

[11]) Hinsichtlich der Bezeichnung „Kompositionsreihe“ vgl. N., Fußnote [33]).

[12]) Die Kenntnis des Begriffs der Länge und des folgenden Satzes 2 verdanke ich einem Vortrag von E. Noether über Hilbertsche Zahlen (Theorie der irreduziblen Ideale); vgl. dazu Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung **34** (1926), S. 101 der schrägen Paginierung.

3. Multiplikationsringe. Eine besondere Klasse von Ringen mit Doppelkettensatz bilden die *regulären Multiplikationsringe*[13]). Nach W. Krull versteht man darunter einen nullteilerfreien Ring mit Einheitselement, in dem der Teilerkettensatz für Ideale gilt und für diese aus Teilbarkeit $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$ Produktdarstellung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ folgt. Man beweist einfach, daß in diesen Ringen ein (vom Null- und Einheitsideal verschiedenes) Primideal nur das Einheitsideal als echten Teiler besitzt und Primärideale eindeutige Potenzen der zugehörigen Primideale werden. Die im Ring nach N. § 6, Satz III geltende Idealtheorie nimmt also die Form an: Jedes Ideal aus Σ ist entweder selbst Primideal oder läßt sich eindeutig als Potenzprodukt von Primidealen darstellen, die sämtlich vom Einheitsideal verschieden sind. Es liegen demnach dieselben Verhältnisse wie in N. § 9, 3 vor; d. h. *die regulären Multiplikationsringe sind identisch mit denjenigen, für die die fünf Axiome aus N. gelten* (vgl. N., Einleitung). — Spezielle Multiplikationsringe bilden die regulären *Hauptidealringe*, d. h. Ringe, in denen jedes Ideal Hauptideal ist, also eine aus einem einzigen Element bestehende Basis besitzt[14]).

Ist $\mathfrak{R}$ Multiplikationsring, $\mathfrak{L}$ eine endliche Erweiterung 1. Art seines Quotientenkörpers $\mathfrak{K} = Q(\mathfrak{R})$, sowie $\mathfrak{S}$ der Ring aller $\mathfrak{R}$-ganzen Elemente aus $\mathfrak{L}$, so ist nach N. § 3, 1 jeder $\mathfrak{R}$ umfassende Unterring $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{S}$ eine endliche $\mathfrak{R}$-Ordnung. Somit besteht in $\mathfrak{T}$ die in 2. gegebene Idealtheorie. Die dort gebrachten Entwicklungen betreffen u. a. also die Ordnungen endlicher algebraischer Zahlkörper sowie die andern, in N. § 3, Abschn. 3 und 4 erwähnten Bereiche.

4. Verallgemeinerte Abelsche Gruppen[15]). Im Ring Σ werden wie in G. § 1, 6 Moduln betrachtet, deren Multiplikatorenbereich Γ ein nullteilerfreier Hauptidealring ist. Das Produkt des Nullelements aus Γ

---

[13]) Multiplikationsringe hat prinzipiell zuerst W. Krull behandelt; vgl. W. Krull, Über Multiplikationsringe, unter A. Loewy, Beiträge zur Algebra 3; Berichte der Heidelberger Akademie 1925, 5. Abhandlung. Dort sind die Multiplikationsringe vor allem in ringtheoretischer Hinsicht behandelt. Die hier gegebene Idealtheorie war mir schon im Winter 1923/24 im wesentlichen durch eine E. Noethersche Vorlesung bekannt.

[14]) Vgl. W. Krull, Über die verschiedenen Arten der Hauptidealringe; Berichte der Heidelberger Akademie, 1924, 6. Abhandlung.

[15]) Zu dieser Auffassung vgl. die Fußnote [33]) zu N. § 10 sowie die Arbeit von W. Krull, Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 161 ff. Die Kenntnis der Tatsachen dieses 4. Abschnitts verdanke ich einer Vorlesung von E. Noether im Winter 1924/25; vgl. auch die Note über einen Vortrag im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung **34** (1926), S. 104 der schrägen Paginierung.

mit einem beliebigen Element aus Σ sei das Nullelement aus Σ; für das Einheitselement $\bar{e}$ von Γ gelte $\bar{e} \cdot \sigma = \sigma$ bei beliebigem σ aus Σ.

a) Definition 2. Die *Periode* des Moduls $\mathfrak{M}$ bez. Γ ist definiert als größter gemeinsamer Teiler $\mathfrak{m}$ aller Ideale $\mathfrak{g}$ aus Γ, für die $\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{M}$ gleich dem Nullmodul wird. — Wenigstens ein solches Ideal $\mathfrak{g}$ existiert, das Nullideal nämlich[16]).

Das Verhalten von Periode und Modul findet sich ausgesprochen in dem

Satz 4. *Besitzt der Modul $\mathfrak{M}$ die Periode $\mathfrak{m}$, und besteht in Γ die Darstellung durch endlich viele aber mindestens zwei paarweise teilerfremde, vom Einheitsideal Γ verschiedene Komponenten $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_s$ mit $\mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j = \Gamma$ (für $i \neq j$), so wird $\mathfrak{M}$ direkte Summe (bez. des Nullmoduls) der s Moduln $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{m}_i' \mathfrak{M}$ mit den Perioden $\mathfrak{m}_i$, wenn $\mathfrak{m}_i' = \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_{i-1} \mathfrak{m}_{i+1} \dots \mathfrak{m}_s$* gesetzt ist (vgl. G. § 2, 1).

Der Beweis verläuft genau so wie für einen entsprechenden Satz bei den gewöhnlichen endlichen Abelschen Gruppen, indem man sich vergegenwärtigt, daß die dabei angewandten Schlüsse nur von den abstrakten Verknüpfungen und Eigenschaften der Moduln Gebrauch machen; die bei endlichen Gruppen auftretende „Ordnung" ist dabei sinngemäß durch die Periode zu ersetzen.

Definition 3. Ein *Modul* $\mathfrak{M}$ heißt *primär* bez. Γ, wenn seine Periode Primärideal in Γ ist. — Ein Modul $\mathfrak{M}$ mit der Periode (0) ist also ein primärer Modul, ebenso wie ein Modul mit der Periode Γ; letzterer wird offenbar mit dem Nullmodul identisch.

Da sich nach 3. in Γ jedes Ideal eindeutig darstellen läßt als Produkt endlich vieler paarweise teilerfremder Primärideale, so folgt aus Satz 4 sofort der

Satz 5. *Jeder Modul mit einer Periode $\mathfrak{m} = \mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_s$ ist entweder selbst primär oder läßt sich eindeutig darstellen als direkte Summe (bez. des Nullmoduls) von primären Moduln $\mathfrak{Q}_1, \dots, \mathfrak{Q}_s$ mit den paarweise teilerfremden, vom Einheitsideal verschiedenen Perioden $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$.*

Beweis. Es bleibt nur der Nachweis der Eindeutigkeit der Zerlegung. Sei also $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{Q}}_1 + \dots + \overline{\mathfrak{Q}}_k$ mit der Periode $\bar{\mathfrak{q}}_i \neq \Gamma$ für $\overline{\mathfrak{Q}}_i$ — was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet — und $\bar{\mathfrak{q}}_i + \bar{\mathfrak{q}}_j = \Gamma$ für $i \neq j$. Sei $\bar{\mathfrak{q}}_1 \dots \bar{\mathfrak{q}}_k = \overline{\mathfrak{m}}$. Es ist $\overline{\mathfrak{m}} \cdot \mathfrak{M} = (0)$, also $\overline{\mathfrak{m}} \geqq \mathfrak{m}$; zum andern kommt $(0) = \mathfrak{m}\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\overline{\mathfrak{Q}}_1 + \dots + \mathfrak{m}\overline{\mathfrak{Q}}_k$, also $\mathfrak{m}\overline{\mathfrak{Q}}_i = (0)$ für $i = 1, \dots, k$. Demnach wird $\mathfrak{m} \geqq \bar{\mathfrak{q}}_i$ $(i = 1, \dots, k)$, also $\mathfrak{m} \geqq \overline{\mathfrak{m}}$ und $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}$. Aus der eindeutigen Darstellung von $\mathfrak{m}$ folgt $k = s$ und bei geeigneter Anordnung $\mathfrak{q}_i = \bar{\mathfrak{q}}_i$ $(i = 1, \dots, s)$.

[16]) Vgl. hier Hentzelt-Noether, Polynomideale und Resultanten, § 1, Math. Ann. 88 (1922), S. 53—79.

Sei also jetzt $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q}_1 + \ldots + \mathfrak{Q}_s = \overline{\mathfrak{Q}}_1 + \ldots + \overline{\mathfrak{Q}}_s$ mit $\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{q}_i' \cdot \mathfrak{M}$. $\mathfrak{Q}_i$ und $\overline{\mathfrak{Q}}_i$ sollen dieselbe Periode $\mathfrak{q}_i$ besitzen. Es kommt

$$\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{q}_i' \mathfrak{M} = \mathfrak{q}_i' \overline{\mathfrak{Q}}_i + \ldots + \mathfrak{q}_i' \overline{\mathfrak{Q}}_s = \mathfrak{q}_i' \overline{\mathfrak{Q}}_i \quad \text{sowie} \quad \mathfrak{q}_i \overline{\mathfrak{Q}}_i = (0).$$

Also hat man $(\mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_i') \overline{\mathfrak{Q}}_i = \Gamma \cdot \overline{\mathfrak{Q}}_i = \overline{\mathfrak{Q}}_i = \mathfrak{Q}_i$, w. z. b. w.

Definition 4. Ein endlicher *Modul* $\mathfrak{M} = (\mu_1, \ldots, \mu_\lambda)$ heißt *zyklisch*, wenn er eine aus einem einzigen Element bestehende Basis besitzt. Ein *Modul* heißt *zyklisch direkt unzerlegbar*, wenn er sich nicht als direkte Summe (bez. des Nullmoduls) endlich vieler (aber mindestens zweier) zyklischer Moduln darstellen läßt.

Für *endliche primäre Moduln* beweist man den

Satz 6. *Jeder endliche primäre Modul ist entweder selbst ein zyklischer und zyklisch direkt unzerlegbarer Modul, oder läßt sich bis auf Isomorphie eindeutig darstellen als direkte Summe (bez. des Nullmoduls) endlich vieler zyklischer, zyklisch direkt unzerlegbarer Moduln*[17]).

Der Beweis ist für Moduln mit der Periode $\mathfrak{m} = (0)$ und $\mathfrak{m} \neq (0)$ getrennt zu führen. Im übrigen gilt das zu Satz 4 Gesagte.

Durch Kombination von Satz 5 und 6 ergibt sich, daß jeder endliche Modul $\mathfrak{M}$, der nicht schon selbst zyklisch und zyklisch direkt unzerlegbar ist, sich bis auf Isomorphie eindeutig darstellen läßt als direkte Summe (bez. des Nullmoduls) endlich vieler zyklischer, zyklisch direkt unzerlegbarer Moduln. In beiden Fällen wird die Anzahl dieser letzteren Moduln als *Rang des endlichen Γ-Moduls* $\mathfrak{M}$ bezeichnet.

b) Zum Aufbau der Theorie der Normen benötigt man die folgenden Tatsachen:

In Σ seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei endliche Γ-Moduln gleichen Ranges und $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$. Sind $\mathfrak{A} = \Gamma \alpha_1 + \ldots + \Gamma \alpha_n$ und $\mathfrak{B} = \Gamma \beta_1 + \ldots + \Gamma \beta_n$ nach a) bestehende Darstellungen durch zyklische und zyklisch direkt unzerlegbare

---

[17]) Vgl. H. Prüfer, Theorie der Abelschen Gruppen I., Math. Zeitschr. **20** (1924), S. 165—187. — Satz 6 samt den im Abschnitt vor b) gezogenen Folgerungen gilt auch noch, wenn Γ direkte Summe endlich vieler nullteilerfreier Hauptidealringe $\Gamma = \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_n$ wird, derart, daß jedes Γ_i Ideal in Γ ist. Man hat dann nämlich $\Gamma_i^2 = \Gamma_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $\Gamma_i \Gamma_j = (0)$ für $i \neq j$. Daraus ergibt sich weiter $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \ldots + \mathfrak{M}_n$ mit $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M} \Gamma_i$. Es handelt sich wirklich um eine direkte Summe (bez. des Nullmoduls). Setzt man nämlich $\Gamma_i' = \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_{i-1} + \Gamma_{i+1} + \ldots + \Gamma_n$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{M} \Gamma_i - \mathfrak{M} \Gamma_i'$, so wird $\mathfrak{B} \Gamma_i \geqq (\mathfrak{M} \Gamma_i') \Gamma_i = (0)$, $\mathfrak{B} \Gamma_i' \geqq (\mathfrak{M} \Gamma_i) \Gamma_i' = (0)$, also $\mathfrak{B} \Gamma_i + \mathfrak{B} \Gamma_i' = \mathfrak{B} (\Gamma_i + \Gamma_i') = \mathfrak{B} \Gamma = \mathfrak{B} = (0)$. Die $\mathfrak{M}_i$ sind endliche Moduln bez. der Hauptidealringe Γ_i; ihr Rang bez. Γ ist gleich dem bez. Γ_i, da für die in einer Darstellung $\mathfrak{M}_i = \Gamma_i \mu_{i_1} + \ldots + \Gamma_i \mu_{i_{n_i}}$ auftretenden zyklischen, zyklisch direkt unzerlegbaren Komponenten $\Gamma_i \mu_{i_j} = \Gamma \mu_{i_j}$ gilt und die Eigenschaft der Unzerlegbarkeit bei dieser Erweiterung des Multiplikatorenringes erhalten bleibt. Der Rang von $\mathfrak{M}$ bez. Γ wird dann die Summe der Rangzahlen der $\mathfrak{M}_i$ wegen $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \ldots + \mathfrak{M}_n$.

Moduln $\Gamma\alpha_i$, $\Gamma\beta_i$, so hat man Relationen $\alpha_i = \sum_{k=1}^{n} g_{ik}\beta_k$ mit Koeffizienten g_{ik} aus Γ.

Definition 5. Die *Norm* $N(\mathfrak{B}|\mathfrak{A})$ *von* $\mathfrak{B}$ *nach* $\mathfrak{A}$ ist definiert als das aus der Determinante $|g_{ik}|$ in Γ abgeleitete Hauptideal.

Es ist sehr leicht einzusehen, daß die Norm eine Invariante der beiden Moduln $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, also unabhängig von der speziellen Basis der α_i, β_i ist. Noch genauer gilt: *Die Norm ist eine Invariante des Restklassenmoduls* $\mathfrak{B}|\mathfrak{A}$; *isomorphe Restklassensysteme von* Γ*-Moduln haben dieselbe Norm.*

Beweis. Die Elementarteilertheorie lehrt, daß die Basen der α_i, β_i speziell so wählbar sind, daß für $i = 1, \ldots, n$ wird $\alpha_i = e_i\beta_i$ mit $e_i = 0 (\Gamma e_{i+1})$. Diese e_i aus Γ heißen die Elementarteiler von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$. Es wird also die Norm gleich ihrem Produkt, $N(\mathfrak{B}|\mathfrak{A}) = e_1 \ldots e_n$. Die Elementarteiler nun sind Invarianten der Restklassenmoduln: Isomorphe Restklassenmoduln (mit dem gleichen Multiplikatorenbereich) liefern dieselben Elementarteiler. Daraus aber folgt sofort die Behauptung.

Ist $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B} \geqq \mathfrak{C}$, sowie $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ von gleichem Rang, so ergibt sich nach den einfachsten Determinantensätzen sofort, daß $N(\mathfrak{C}|\mathfrak{A}) = N(\mathfrak{C}|\mathfrak{B}) \cdot N(\mathfrak{B}|\mathfrak{A})$ wird.

§ 2.

Besondere Quotientenringe. Reguläre Multiplikationsringe und ihre Erweiterungen.

1. Besondere Quotientenringe[18]). I. In einem nullteilerfreien Ring P mit Einheitselement und Gültigkeit des Doppelkettensatzes mod. den vom Nullideal verschiedenen Idealen bezeichne $\mathfrak{g}$ ein vom Null- und Einheitsideal verschiedenes Ideal. G sei das System der zu $\mathfrak{g}$ teilerfremden Elemente aus P, sowie $\mathsf{P}' = \frac{\mathsf{P}}{G}$ der nach G. § 1, 5 gebildete Quotientenring. In Ergänzung der Ergebnisse des § 6 aus G lassen sich dann über die Verengungsideale in P sehr genaue Aussagen machen. Es gilt nämlich

[18]) Diese Art von Quotientenringen hat W. Krull nachdrücklicher in die Theorie der Zahl- und Funktionenkörper hineingezogen; vgl. dazu den Vortrag auf der Danziger Tagung, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung **34** (1926), S. 121 der schrägen Paginierung. Auch ihre in 3. gegebene Verwendung in der Theorie der Relativkörper ist dort gebracht, worauf mich E. Noether nachträglich aufmerksam machte. — Wird $\mathfrak{g}$ als Nullideal angenommen, so sind die Ergebnisse von 1. I. trivial, da dann G das System der Einheiten aus P, also $\mathsf{P}' = \mathsf{P}$ wird; wie leicht zu sehen ist; ebenso selbstverständlich werden die Ergebnisse von 1., wenn $\mathfrak{g} = \mathsf{P}$ gesetzt wird, da dann P' den Quotientenkörper $Q(\mathsf{P})$ ergibt.

Satz 1. *Die vom Nullideal* (0) *und Einheitsideal* P *verschiedenen Verengungsideale in* P *sind alle und nur diejenigen Ideale, deren zugehörige Primideale in* $\mathfrak{g}$ *aufgehen.*

Beweis. (0) und P sind offenbar Verengungsideale. — Nach Satz 2 aus G. § 3 ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von Verengungsidealen wieder ein solches; wegen der Identität von Vielfachen- und Produktdarstellung bei einer Zerlegung in endlich viele paarweise teilerfremde Komponenten und Hilfssatz 1 aus G. § 8 ist jede größte primäre Komponente eines Verengungsideals wieder Verengungsideal. Deshalb kann man sich beim Beweise auf Primärideale beschränken.

a) $\mathfrak{q}$ *besitze ein zu* $\mathfrak{g}$ *gehöriges Primideal* $\mathfrak{p}$. Sei gesetzt $\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}\,\mathsf{P}' - \mathsf{P}$; dann ist $\mathfrak{q} \geqq \bar{\mathfrak{q}}$. Wäre $\mathfrak{q} > \bar{\mathfrak{q}}$, so ergäbe sich die Existenz eines $\varkappa \equiv 0\,(\bar{\mathfrak{q}})$, $\not\equiv 0\,(\mathfrak{q})$. Dieses $\varkappa$ hätte die Form $\varkappa = \frac{q}{a}$, wo q zu $\mathfrak{q}$ und a zu G gehört. Somit käme $a\varkappa = q \equiv 0\,(\mathfrak{q})$. a aber ist zu $\mathfrak{g}$, also auch zu jedem seiner Primideale, somit auch zu $\mathfrak{q}$ teilerfremd, d. h. es wird gegen die Voraussetzung $\varkappa \equiv 0\,(\mathfrak{q})$.

b) *Das vom Null- und Einheitsideal verschiedene Primärideal* $\mathfrak{q}$ *sei zu* $\mathfrak{g}$ *teilerfremd.* Es enthält dann wenigstens ein zu $\mathfrak{g}$ teilerfremdes Element $\varkappa \neq 0$. Somit liegt $\varkappa \cdot \frac{e}{\varkappa} = e$ in $\mathfrak{q}\,\mathsf{P}'$. Also wird $\mathfrak{q}\,\mathsf{P}' = \mathsf{P}'$, $\mathfrak{q}\,\mathsf{P}' - \mathsf{P} = \mathsf{P}' - \mathsf{P} = \mathsf{P} + \mathfrak{q}$, w. z. b. w. — Weiter besteht

Satz 2. *Sind* $\mathfrak{m}$ *und* $\mathfrak{M}$ *einander entsprechende ausgezeichnete, vom Nullideal verschiedene Ideale aus* P *und* P', *so wird* $\mathsf{P}\,|\,\mathfrak{m} \simeq \mathsf{P}'\,|\,\mathfrak{M}$. *Ist* $\mathfrak{M} \geqq \mathfrak{A} \geqq \mathsf{P}'$ *und dem Ideal* $\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{M}$ *aus* $\mathsf{P}'\,|\,\mathfrak{M}$ *durch Isomorphie in* $\mathsf{P}\,|\,\mathfrak{m}$ *das Ideal* $\mathfrak{a}\,|\,\mathfrak{m}$ *mit* $\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{a} \geqq \mathsf{P}$ *zugeordnet, so entsprechen sich* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{A}$ *als ausgezeichnete Ideale aus* P *und* P'.

Zum Beweise dient die Bemerkung: Jede Klasse aus $\mathsf{P}'\,|\,\mathfrak{M}$ kann durch ein Element aus P repräsentiert werden. — Sei nämlich (ϱ') eine Klasse und $\varrho' = \frac{\varrho}{a}$ mit ϱ aus P und a aus G; dann wird $a\,\varrho' = \varrho$, also $(a)(\varrho') = (\varrho)$. a ist zu $\mathfrak{g}$, nach Satz 1 wegen $\mathfrak{m} \neq (0)$ also auch zu $\mathfrak{m}$ teilerfremd; deshalb gibt es in P ein a', so daß $a\,a' \equiv e\,(\mathfrak{m})$, also $a\,a' = e\,(\mathfrak{M})$, d. h. $(a)(a') = (e)$ wird. Aus $(a)(\varrho') = (\varrho)$ kommt dann $(\varrho') = (\varrho')(a)(a') = (\varrho)(a') = (\varrho\,a')$, w. z. b. w. — Hiernach ist $\mathsf{P}'\,|\,\mathfrak{M} \leqq \mathsf{P}\,|\,\mathfrak{M}$, wegen $\mathsf{P}\,|\,\mathfrak{M} \leqq \mathsf{P}'\,|\,\mathfrak{M}$ also $\mathsf{P}'\,|\,\mathfrak{M} = \mathsf{P}\,|\,\mathfrak{M}$. Aus $\mathsf{P}\,|\,\mathfrak{M} \simeq \mathsf{P}\,|\,\mathfrak{m}$ folgt damit der erste Teil der Behauptung. Dem Ideal $\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{M}$ aus $\mathsf{P}'\,|\,\mathfrak{M}$ sei durch Isomorphie in $\mathsf{P}\,|\,\mathfrak{m}$ das Ideal $\mathfrak{a}\,|\,\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{a} \geqq \mathsf{P}$ zugeordnet, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{A} - \mathsf{P}$ bezeichne das durch $\mathfrak{A}$ in P erzeugte Verengungsideal. Nach Definition von $\mathfrak{a}'$ ist $\mathfrak{a}'\,|\,\mathfrak{M}$ die Gesamtheit der durch Elemente aus P repräsentierbaren Klassen von $\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{M}$. Nach der obigen Bemerkung kommt

also $\mathfrak{A}|\mathfrak{M} = \mathfrak{a}'|\mathfrak{M}$ und weiter $\mathfrak{A}|\mathfrak{M} = \mathfrak{a}'|\mathfrak{M} \sim \mathfrak{a}'|\mathfrak{a}' - \mathfrak{M} = \mathfrak{a}'|\mathfrak{A} - \mathsf{P} - \mathfrak{M} = \mathfrak{a}'|\mathfrak{m}$, womit wegen der Voraussetzung über $\mathfrak{a}$ und der besonderen Beschaffenheit des Isomorphismus auch der zweite Teil des Satzes bewiesen ist.

II. *War im besonderen* P *ein Multiplikationsring, so wird* P' *Hauptidealring.*

Beweis. $\mathfrak{A}$ sei ein beliebiges Ideal in P', $\mathfrak{a}$ sein Verengungsideal in P. Nach N. § 9, 4 läßt sich jedes Ideal $\mathfrak{a}$ aus P in ein Hauptideal verwandeln durch Multiplikation mit einem Ideal $\mathfrak{c}$, das zu einem beliebig vorgegebenem $\mathfrak{b} \neq (0)$ teilerfremd ist. Nimmt man speziell $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}$, so hat man $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \varrho \cdot \mathsf{P}$; daraus folgt durch Erweiterung wegen $\mathfrak{a}\mathsf{P}' = \mathfrak{A}$ weiter $\mathfrak{A}(\mathfrak{c}\mathsf{P}') = \varrho\mathsf{P}'$. $\mathfrak{c}\mathsf{P}'$ aber wird nach dem Teil b) des Beweises zu Satz 1 gleich P'; mithin kommt $\mathfrak{A} = \varrho\mathsf{P}'$, w. z. b. w.

2. Reguläre Multiplikationsringe und ihre Erweiterungen. Der nullteilerfreie Ring Σ sei eine endliche P-Ordnung und besitze ein in P gelegenes Einheitselement. P sei Multiplikationsring. Dann wird das Verhältnis der Ideale in P und Σ geklärt durch den

Satz 3. *Das System* G_{P} *aller Ideale aus* P *und das System der Erweiterungsideale in* Σ *bilden zwei isomorphe, vollständige Idealkörper. Hierbei einander zugeordnete Ideale sind die nach der allgemeinen Zuordnung* (G. § 4,4) *einander entsprechenden ausgezeichneten Ideale.*

Der Beweis benutzt einmal, daß in Σ mod. den vom Nullideal verschiedenen Idealen der Doppelkettensatz gilt, also sich jedes Ideal eindeutig als Produkt endlich vieler, paarweise teilerfremder, größter primärer Komponenten darstellen läßt. Zum andern stützt er sich auf den folgenden, für endliche nullteilerfreie P-Ordnungen Σ geltenden

Hilfssatz. *Jedes Ideal in* P *ist Verengungsideal bez.* Σ.

Beweis. Das betreffende Ideal $\mathfrak{m}$ in P darf als vom Nullideal verschieden vorausgesetzt werden. $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\Sigma - \mathsf{P}$ ist das Verengungsideal der Klasse $k_{(\mathfrak{m}\Sigma)}$ (G. § 4). Da (nach § 1) in P für die Ideale der Teilerkettensatz gilt, besitzt $\mathfrak{m}$, also auch der P-Modul $\mathfrak{m}\Sigma = \mathfrak{m}\Sigma$ als Produkt der endlichen P-Moduln $\mathfrak{m}$ und Σ eine endliche Basis. Aus $\mathfrak{m} \geqq \overline{\mathfrak{m}}$ folgt für geeignetes $\mathfrak{c}$ die Beziehung $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{c}$. Dann kommt durch Erweiterung $\mathfrak{m}\Sigma = \overline{\mathfrak{m}}\Sigma = \mathfrak{c}(\overline{\mathfrak{m}}\Sigma)$. Damit aber sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 aus § 1 erfüllt. Somit wird $e \equiv 0\,(\mathfrak{c})$, also $\mathfrak{c} = \mathsf{P}$ und damit $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}$; $\mathfrak{m}$ ist Verengungsideal.

G_{P} ist ein vollständiger Idealkörper. G_{Σ} enthält nach G. § 3, Satz 1 und Satz 3 neben beliebig vielen Idealen deren größten gemeinsamen Teiler und neben zweien ihr Produkt; außerdem herrscht Zuordnung der Verknüpfungsresultate einander entsprechender Ideale.

Es bleibt also die auf das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und den Quotienten bezügliche Behauptung nachzuweisen.

I. Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches. $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_\nu, \ldots$ seien Erweiterungsideale im Körper aller Ideale aus Σ. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $\mathfrak{M}_1 - \ldots - \mathfrak{M}_\nu - \ldots = \mathfrak{V}$ ist das Nullideal. Dann ist $\mathfrak{V}$ Element von G_Σ, und es besteht auch Zuordnung der Verknüpfungsresultate.

b) $\mathfrak{M}_1 - \ldots - \mathfrak{M}_\nu - \ldots = \mathfrak{V}$ ist vom Nullideal verschieden. Setzt man dann $\mathfrak{V}_\nu = \mathfrak{M}_1 - \ldots - \mathfrak{M}_\nu$, so wird für jeden Index $\mathfrak{V} \geqq \mathfrak{V}_\nu$ erfüllt, also des Vielfachenkettensatzes in Σ halber von einem gewissen λ ab $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_\lambda = \mathfrak{V}_{\lambda+1} = \ldots$, somit $\mathfrak{V} = \mathfrak{M}_1 - \ldots - \mathfrak{M}_\lambda$. Demnach bleibt die Richtigkeit der Behauptung für endlich viele, d. h. für zwei Erweiterungsideale $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ nachzuweisen. Da man beide Ideale als Produkt endlich vieler, paarweise teilerfremder Komponenten $\mathfrak{Q}$ darstellen kann, deren jede Erweiterungsideal eines Primärideals $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^\varrho$ aus P ist, und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier zueinander teilerfremder Ideale gleich ihrem Produkt wird, so genügt es, $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ als Erweiterungsideale zweier zum gleichen Primideal $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}^{\varrho_1}$, $\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{p}^{\varrho_2}$ anzunehmen. Ist nun etwa $\varrho_1 \geqq \varrho_2$, so wird $\mathfrak{m}_1 \geqq \mathfrak{m}_2$, also $\mathfrak{M}_1 \geqq \mathfrak{M}_2$; somit gehört $\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1$ zu G_Σ.

II. Quotient. Wieder kann man sich der eben angeführten Zerlegung der Ideale $\mathfrak{M}$ halber und wegen der Gültigkeit der Formel $(\mathfrak{Q}_1 - \ldots - \mathfrak{Q}_\nu) : \mathfrak{B} = (\mathfrak{Q}_1 : \mathfrak{B}) - \ldots - (\mathfrak{Q}_\nu : \mathfrak{B})$ auf Quotienten $\mathfrak{A} : \mathfrak{B}$ beschränken, bei denen $\mathfrak{A}$ Erweiterungsideal eines Primärideals aus P ist überdies kann noch wegen $\mathfrak{A} : \mathfrak{C} = \mathfrak{A} : (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})$ das Ideal $\mathfrak{B}$ als Teiler von $\mathfrak{A}$ angenommen werden. Wird $\mathfrak{B}$ mit dem Nullideal (0) oder Einheitsideal Σ identisch, so ist die Behauptung klar. Im andern Fall bestimmen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in P beide zum gleichen Primideal $\mathfrak{p} \neq \mathsf{P}$ gehörige Primärideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$. Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}\mathfrak{b}$, so wird $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{C}$ das zu $\mathfrak{c}$ gehörige Erweiterungsideal ist. Somit kommt $\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{A} : \mathfrak{B} = \mathfrak{Q}$ und deshalb $\mathfrak{B}\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Bezeichnet $\mathfrak{P}$ das zu $\mathfrak{p}$ gehörige Erweiterungsideal, G das System der zu $\mathfrak{P}$ teilerfremden Elemente aus Σ, g das der zu $\mathfrak{p}$ teilerfremden aus P, so wird der Quotientenring $\mathsf{P}' = \frac{\mathsf{P}}{g}$ Unterring von $\Sigma' = \frac{\Sigma}{G}$. In P' wird $\mathfrak{b}$ Hauptideal, $\mathfrak{b}\mathsf{P}' = \beta\mathsf{P}'$; also kommt auch in Σ' die Beziehung $\mathfrak{B}\Sigma' = \beta\Sigma'$. Somit hat man

$$\beta(\mathfrak{Q}\Sigma') = (\mathfrak{B}\Sigma')(\mathfrak{Q}\Sigma') = (\mathfrak{B}\mathfrak{Q})\Sigma' = (\mathfrak{B}\mathfrak{C})\Sigma' = \ldots = \beta(\mathfrak{C}\Sigma').$$

Da Σ' nullteilerfrei und $\beta \neq 0$ ist, folgt daraus $\mathfrak{Q}\Sigma' = \mathfrak{C}\Sigma'$. Nun sind aber nach 1., Satz 1 die Ideale $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{C}$ aus Σ beide Verengungsideale bez. Σ'; somit wird schließlich $\mathfrak{Q} = \mathfrak{C}$, w. z. b. w.

Durch diesen Satz sind die Betrachtungen eingeordnet, die in der Theorie der algebraischen Zahlen unter dem Titel „*Ideale in verschiedenen Körpern*“ bekannt sind[5]). Es handelt sich hierbei um die Beziehungen zwischen den Idealen der Hauptordnungen $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ zweier endlicher algebraischer Zahlkörper $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$, von denen $\mathfrak{K}_2$ eine Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$ ist. Zugleich aber sind sie auf beliebige endliche $\mathfrak{S}_1$-Ordnungen $\mathfrak{T}_2$ aus $\mathfrak{K}_2$ ausgedehnt.

3. Quotientenringe in der Theorie der Relativkörper. In der Theorie der Zahl- und Funktionenkörper gibt es häufig Aussagen, die sich wesentlich auf die Hauptidealeigenschaft des Ringes der ganzen rationalen Zahlen oder des Polynombereichs einer Veränderlichen stützen. Um ihnen auch bei Zugrundelegung eines Multiplikationsringes, d. h. in der Theorie der Relativkörper, Gültigkeit zu verschaffen, ist es am einfachsten, von den jeweiligen Bereichen zu gewissen Quotientenringen überzugehen. Dabei benötigt man die folgenden Entwicklungen.

$\mathfrak{R}$ sei ein nullteilerfreier Multiplikationsring, $\mathfrak{K} = Q(\mathfrak{R})$ sein Quotientenkörper, $\mathfrak{L}$ eine endliche Erweiterung 1. Art von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{T}$ eine endliche $\mathfrak{R}$-Ordnung aus $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{m}$ bezeichne ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\mathfrak{T}$ sein Erweiterungsideal in $\mathfrak{T}$. Dann besteht der

Satz 4. *Bezeichnet $m(M)$ das System der zu $\mathfrak{m}(\mathfrak{M})$ teilerfremden Elemente aus $\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$, so ist der Quotientenring $\mathfrak{T}' = \frac{\mathfrak{T}}{M}$ ein endlicher Modul bez. des Hauptidealringes $\mathfrak{R}' = \frac{\mathfrak{R}}{m}$.*

Beweis. Der Satz ist offenbar richtig, wenn $\mathfrak{m}$ das Null- oder Einheitsideal aus $\mathfrak{R}$ ist, da dann $m(M)$ das System der Einheiten bzw. das System aller Elemente aus $\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$ und somit $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}$ $(\mathfrak{T}' = \mathfrak{T})$ bzw. $\mathfrak{R}' = \mathfrak{K}$ $(\mathfrak{T}' = Q(\mathfrak{T}))$ wird. Sei also im folgenden $\mathfrak{m}$ vom Null- und Einheitsideal verschieden.

$\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}_1', \ldots, \mathfrak{T}_n'$ seien die zu $\mathfrak{T}'$ konjugierten Ordnungen in den n bez. $\mathfrak{K}$ konjugierten Körpern $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_n$ von $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{G}$ der aus $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_n$ gebildete Galoissche Körper. Stellt man ein Element τ' aus $\mathfrak{T}'$ durch die in N. § 3 definierten Elemente ξ_i aus $\mathfrak{L}$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ dar, $\tau' = k_1\xi_1 + \ldots + k_n\xi_n$, so schließt man wie dort, daß diese k_i dem Durchschnitt $\left[\mathfrak{K}, \frac{\mathfrak{S}^*}{M^*}\right]$ angehören; dabei bezeichnet $\mathfrak{S}^*$ den Ring aller $\mathfrak{R}$-ganzen Elemente aus $\mathfrak{G}$ und M^* das System der zu $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{m}\mathfrak{S}^*$ teilerfremden Elemente aus $\mathfrak{S}^*$. Um den Beweis des Satzes zu vollenden, ist noch $\left[\mathfrak{K}, \frac{\mathfrak{S}^*}{M^*}\right] = \mathfrak{R}'$ zu zeigen; dann schließt man weiter nach dem Modulsatz aus N. § 2.

Nun ist sicher $\mathfrak{R}' \neq \left[\mathfrak{R}, \frac{\mathfrak{S}^*}{M^*}\right]$. Um $\left[\mathfrak{R}, \frac{\mathfrak{S}^*}{M^*}\right] \neq \mathfrak{R}'$ zu beweisen, macht man vorerst folgende

Bemerkung. Ein Element k aus $\mathfrak{K}$ läßt sich so als Quotient $k = \frac{r_1}{r_2}$ zweier Elemente r_1, r_2 aus $\mathfrak{R}$ darstellen, daß nicht gleichzeitig beide Hauptideale $\mathfrak{R} r_1, \mathfrak{R} r_2$ durch ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar sind.

Beweis. Nach der Theorie der gebrochenen Ideale (N. § 9, 5) existiert für den $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{R} k$ eine Darstellung $\mathfrak{R} k = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ als Quotient zweier Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{R}$. Verwandelt man nach N. § 9, 4 das Ideal $\mathfrak{b}$ durch Multiplikation mit einem zu $\mathfrak{m} \neq (0)$ teilerfremden Hauptideal $\mathfrak{c}$ in ein Hauptideal $\mathfrak{R} r_2$, so hat man eine Darstellung $\mathfrak{R} k = \mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{c} : \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c} : \mathfrak{R} r_2$. Demnach wird $k r_2 = r_1$ Element aus $\mathfrak{R}$, also $k = \frac{r_1}{r_2}$, und diese Darstellung ist die gewünschte.

Sei nun σ^* ein Element aus $\left[\mathfrak{R}, \frac{\mathfrak{S}^*}{M^*}\right]$. Dann bestehen Darstellungen $\sigma^* = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{r}{a}$ mit σ, μ aus $\mathfrak{S}^*, M^*$, r, a aus $\mathfrak{R}$; dabei darf angenommen werden, daß die Hauptideale $\mathfrak{R} r$ und $\mathfrak{R} a$ nicht beide zugleich durch ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Primideal teilbar sind. Wäre nun a nicht teilerfremd zu $\mathfrak{m}$, so wäre a, also auch $r\mu$ durch das Erweiterungsideal $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{p}\mathfrak{S}^*$ eines zu $\mathfrak{m}$ gehörigen Primideals $\mathfrak{p}$ teilbar. Wegen $\mathfrak{M}^* \geqq \mathfrak{P}^*$ ist μ zu $\mathfrak{P}^*$ teilerfremd, also $r \equiv 0 (\mathfrak{P}^*)$. $\mathfrak{p}$ aber ist nach dem Hilfssatz aus 2. Verengungsideal, somit wird $r \equiv 0 \ (\mathfrak{P}^* - \mathfrak{R} = \mathfrak{p})$, gegen die Voraussetzung. Also ist $\left[\mathfrak{R}, \frac{\mathfrak{S}^*}{M^*}\right] \neq \mathfrak{R}'$ und damit der Satz bewiesen.

§ 3.

Der Grad eines Ideals[19]).

1. Definition und Eigenschaften des zu einem Ideal gehörigen Gradmoduls. Σ sei eine endliche nullteilerfreie T-Ordnung mit einem in T gelegenen Einheitselement. In T, also auch Σ, gelte mod. den vom Nullideal verschiedenen Idealen der Doppelkettensatz. In Σ bezeichne $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q}_1 \ldots \mathfrak{Q}_s$ die Darstellung eines vom Null- und Einheitsideal verschiedenen Ideals $\mathfrak{M}$ durch größte primäre Komponenten; $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$ seien die Exponenten der zugehörigen Primideale $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$.

Der zu $\mathfrak{M}$ gehörige Gradmodul M bez. T wird folgendermaßen gebildet:

Es bezeichne $N^{(\mathsf{T})}$ den Restklassenring von T nach dem System $\mathfrak{N}^{(\mathsf{T})} = \mathfrak{N} - \mathsf{T} = (\mathfrak{P}_1 - \ldots - \mathfrak{P}_s) - \mathsf{T}$ aller in T gelegenen Repräsentanten

[19]) Dieser Paragraph ist bei der Korrektur neu gefaßt, weil sich in der ursprünglichen Darstellung ein Versehen befand, auf das mich B. L. v. d. Waerden hinwies.

von Nullteilerklassen des Restklassenringes $\Sigma \mid \mathfrak{M}$. Setzt man allgemein $Q_j^{(k)} = \mathfrak{O}_k : \mathfrak{P}_k^j \; \mathfrak{O}_k : \mathfrak{P}_k^{j-1}$ $(k = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, \varrho_k)$[21]), so ist jedes $Q_j^{(k)}$ ein $N^{(\mathsf{T})}$-Modul, wenn die Verknüpfungen durch Vermittlung der in Σ bestehenden definiert werden. Unter dem zu $\mathfrak{M}$ bez. T gehörigen Gradmodul M versteht man dann die als $N^{(\mathsf{T})}$-Modul aufgefaßte rein formal gebildete direkte Summe $M = Q_1^{(1)} + \ldots + Q_{\varrho_1}^{(1)} + \ldots + Q_1^{(s)} + \ldots + Q_{\varrho_s}^{(s)}$. Wie üblich wird dabei Addition und Subtraktion zweier Elemente aus M sowie die Multiplikation eines Elementes aus $N^{(\mathsf{T})}$ und eines aus M durch Zusammensetzen der an den einzelnen Elementkomponenten entsprechend ausgeübten Operationen definiert.

Man sieht ohne weiteres, daß ringisomorphen Restklassen- und Multiplikatorenringen modulisomorphe Gradmoduln entsprechen, wenn nur die Bedingung erfüllt ist, daß die Produkte aus einander zugeordneten Elementen entsprechender $Q_j^{(k)}$-Komponenten bzw. des Multiplikatorenringes wieder einander zugeordnet sind.

Wegen der Endlichkeitsannahme über Σ ist *der Gradmodul M ein endlicher $N^{(\mathsf{T})}$-Modul.* Es genügt dazu der Nachweis, daß (für $k = 1, \ldots, s$) $Q^{(k)} = Q_1^{(k)} + \ldots + Q_{\varrho_k}^{(k)}$ ein endlicher $N^{(\mathsf{T})}$-Modul wird. Zu dem Zweck macht man zunächst die

Bemerkung. *Das Verengungsideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} - \mathsf{T}$ eines vom Nullideal verschiedenen Ideals $\mathfrak{M}$ aus Σ ist vom Nullideal verschieden.*

Beweis. $\mathfrak{M}$ und Σ sind bez. des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}^* = Q(\mathsf{T})$ von T von gleichem Rang. Bedeutet $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ein größtes bez. $\mathfrak{K}^*$ linear irreduzibles System aus $\mathfrak{M}$, so besteht deshalb für das Einheitselement e von Σ eine Beziehung $e = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)\mu_1 + \ldots + \left(\frac{a_n}{b_n}\right)\mu_n$ mit Koeffizienten a_i, b_i aus T. Jeder Nenner b_i, also auch ihr Produkt $b = b_1 \ldots b_n$ ist vom Nullelement verschieden, und man hat $b = be = b\left(\frac{a_1}{b_1}\mu_1 + \ldots + \frac{a_n}{b_n}\mu_n\right) \equiv 0\,(\mathfrak{M})$; somit ist $\mathfrak{m} \neq (0)$, w. z. b. w.

Bezeichnet ferner K_k den Restklassenkörper von Σ nach dem zu $\mathfrak{O}_k$ gehörigen Primideal $\mathfrak{P}_k$, so gilt der

Hilfssatz. *Ist in Σ das Primärideal $\mathfrak{O}_k$ von der Länge $\lambda^{(k)}$, so ist der zugehörige Gradmodul $Q^{(k)} = Q_1^{(k)} + \ldots + Q_{\varrho_k}^{(k)}$ als K_k-Modul vom Range $\lambda^{(k)}$.*

Beweis. Da K_k als Körper nullteilerfreier Hauptidealring ist, kann man nach § 1, 4 von einem Rang reden, falls nur jedes $Q_j^{(k)}$ endlicher K_k-Modul wird. Bezeichnet $\mathfrak{O}_k : \mathfrak{P}^{j-1} = \mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_\lambda = \mathfrak{O}_k : \mathfrak{P}_k^j$ eine von $\mathfrak{O}_k : \mathfrak{P}_k^{j-1}$ nach $\mathfrak{O}_k : \mathfrak{P}_k^j$ laufende Kompositionsreihe von Idealen, so wird der Satz bewiesen sein, falls gezeigt wird, daß jedes $Q_j^{(k)}$ ein endlicher

K_k-Modul vom Range λ ist; denn der Rang von $Q^{(k)}$ setzt sich additiv aus den Rangzahlen der $Q_j^{(k)}$ zusammen, und $\lambda^{(k)}$ ist die Summe der Einzellängen λ.

Bezeichnet nun $q_1, \ldots, q_\lambda$ ein System von Elementen aus Σ mit $q_i \equiv 0\,(\mathfrak{q}_i)$, $\not\equiv 0\,(\mathfrak{q}_{i-1})$ $(i = 1, \ldots, \lambda)$, so sind die λ Moduln $K_k(q_i)$ zyklische Moduln.

Sie sind zyklisch direkt unzerlegbar. Da nämlich jedes vom Nullelement (0) verschiedene Element aus $K_k(q_i)$ Basiselement dieses Moduls wird, würde sich aus $K_k(q_i) = K_k(\pi_1) + \ldots + K_k(\pi_n)$ gegen die Voraussetzung ergeben, daß jeder Summand mit $K_k(q_i)$ identisch würde.

Die Summe $S = K_k(q_1) + \ldots + K_k(q_\lambda)$ ist eine direkte bez. des Nullmoduls. Dazu beweist man die eindeutige Darstellung des Nullelements. Sei nämlich $(0) = \{k_1\}(q_1) + \ldots + \{k_\lambda\}(q_\lambda) = (k_1 q_1) + \ldots + (k_\lambda q_\lambda)$, dann folgt aus $(k_\lambda q_\lambda) \equiv -(k_1 q_1) - \ldots - (k_{\lambda-1} q_{\lambda-1})$, daß $k_\lambda q_\lambda \equiv 0\,(\mathfrak{q}_{\lambda-1})$. Somit wird $k_\lambda \equiv 0\,(\mathfrak{P}_k)$, also $\{k_\lambda\} = \{0\}$, weil sonst $q_\lambda \equiv 0\,(\mathfrak{q}_{\lambda-1})$ würde. Durch Fortsetzung des Verfahrens kommt man zu $\{k_1\} = \ldots = \{k_\lambda\} = \{0\}$.

Wendet man die Folgerung des Satzes 3 aus § 1, 2 auf die vorliegende Kompositionsreihe an, so ergibt sich der Modulisomorphismus $\mathfrak{q}_i \,|\, \mathfrak{q}_{i-1} \simeq K_k(q_i)$, $(i = 1, \ldots, \lambda)$; jedes Element aus $\mathfrak{q}_i$ ist nach $\mathfrak{q}_{i-1}$ einem Element $k_i q_i$ kongruent, wo k_i Repräsentant einer Klasse von $\Sigma \,|\, \mathfrak{P}_k$ ist.

Daraus aber ergibt sich sofort, daß $S = Q_j^{(k)}$ wird. Sei nämlich (ϱ) eine beliebige Klasse aus $Q_j^{(k)}$. Sei $\varrho \equiv k_\lambda q_\lambda\,(\mathfrak{q}_{\lambda-1})$, $\varrho - k_\lambda q_\lambda \equiv k_{\lambda-1} q_{\lambda-1}\,(\mathfrak{q}_{\lambda-2}), \ldots,$ $\varrho - k_\lambda q_\lambda - \ldots - k_2 q_2 \equiv k_1 q_1\,(\mathfrak{q}_0)$. Dann wird in $Q_j^{(k)}$ erfüllt $(\varrho) = (k_1 q_1) + \ldots + (k_\lambda q_\lambda) = \{k_1\}(q_1) + \ldots + \{k_\lambda\}(q_\lambda)$, also $Q_j^{(k)} \not\in S$, und wegen $S \not\in Q_j^{(k)}$ kommt schließlich $S = Q_j^{(k)}$, w. z. b. w.

Setzt man nun $\mathfrak{P}_1 - \ldots - \mathfrak{P}_s = \mathfrak{N}$, so ist wegen $\Sigma \,|\, \mathfrak{N} = N = K_1 + \ldots + K_k$ und $K_i\, Q^{(k)} = (0)$ $(i \neq k)$ der Modul $Q^{(k)}$ auch ein endlicher N-Modul und hat als solcher denselben Rang wie als K_k-Modul (vgl. [17]). N aber ist ein endlicher $N^{(\mathsf{T})}$-Modul. Da nämlich $\mathfrak{M} \neq (0)$ ist, gilt gleiches von $\mathfrak{N}$ und somit zufolge der Bemerkung auch von $\mathfrak{N}_\mathsf{T} = \mathfrak{N} - \mathsf{T}$. Deshalb wird $N^{(\mathsf{T})} = \mathsf{T} \,|\, \mathfrak{N}_\mathsf{T}$ direkte Summe (bez. des Nullideals) von endlich vielen Körpern, also nullteilerfreien Hauptidealringen $N^{(\mathsf{T})} = K_1^{(\mathsf{T})} + \ldots + K_r^{(\mathsf{T})}$. Ist etwa $K_\mu^{(\mathsf{T})}$ die dem Restklassenkörper $\mathsf{T} \,|\, \mathfrak{P}_i - \mathsf{T}$ $(i = 1, \ldots, s)$ isomorphe Komponente, so wird wegen der Endlichkeitsvoraussetzung über Σ der Modul K_i ein endlicher $K_\mu^{(\mathsf{T})}$-Modul und wegen $K_\nu^{(\mathsf{T})} K_i = (0)$ $(\nu \neq \mu)$ auch ein endlicher $N^{(\mathsf{T})}$-Modul. Dasselbe gilt für N und schließlich wegen des Hilfssatzes auch für $Q^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, s)$. Damit ist dann auch die Endlichkeit des $N^{(\mathsf{T})}$-Moduls M, d. h. des Gradmoduls von $\mathfrak{M}$ bez. T, bewiesen.

2. Definition und Eigenschaften des Grades eines Ideals.

Definition. *Als den Grad des vom Null- und Einheitsideal verschiedenen Ideals $\mathfrak{M}$ aus Σ bez. T bezeichnet man den Rang des zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Gradmoduls M bez. des Multiplikatorenringes $N^{(\mathsf{T})}$; dem Einheitsideal wird der Grad Null zugeschrieben.*

Infolge Fußnote [17]) kann man vom Rang des Gradmoduls sprechen, da $N^{(\mathsf{T})}$ direkte Summe endlich vieler Körper wird.

Über den Grad bestehen die folgenden Tatsachen[20]).

Satz 1. *Der Grad eines vom Nullideal verschiedenen Ideals $\mathfrak{M}$ aus Σ bez. T ist gleich der Summe der Gradzahlen seiner größten primären Komponenten.*

Beweis. Der Rang des zu $\mathfrak{M}$ gehörigen $N^{(\mathsf{T})}$-Moduls M wird gleich der Summe der Rangzahlen der $N^{(\mathsf{T})}$-Moduln $Q^{(k)} = Q_1^{(k)} \dotplus \ldots \dotplus Q_{\varrho_k}^{(k)}$. Ist $N^{(\mathsf{T})} = K_1^{(\mathsf{T})} \dotplus \ldots \dotplus K_r^{(\mathsf{T})}$ die Darstellung von $N^{(\mathsf{T})}$ als direkte Summe endlich vieler Körper $K_\nu^{(\mathsf{T})}$ und ist etwa $K_\mu^{(\mathsf{T})}$ die dem Restklassenkörper $\mathsf{T} \mid \mathfrak{P}_k - \mathsf{T}$ $(k = 1, \ldots, s)$ isomorphe Komponente, wo $\mathfrak{P}_k$ das zur Primärkomponente $\mathfrak{Q}_k$ von $\mathfrak{M}$ gehörige Primideal ist, so besitzt $Q^{(k)}$ bez. $K_\mu^{(\mathsf{T})}$ wegen $K_\nu^{(\mathsf{T})} \cdot Q^{(k)} = (0)$ $(\nu \neq \mu)$ denselben Rang wie in bezug auf $N^{(\mathsf{T})}$. Der $K_\mu^{(\mathsf{T})}$-Modul $Q^{(k)}$ aber ist der zu $\mathfrak{Q}_k$ bez. T gehörige Gradmodul, und damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 2. *Der Grad eines vom Nullideal verschiedenen Primärideals $\mathfrak{Q}$ in Σ bez. T ist gleich demProdukt aus der Länge λ von $\mathfrak{Q}$ und dem Grad des zugehörigen Primideals $\mathfrak{P}$ bez. T.*

Beweis. Bezeichnet $\mathfrak{P}_\mathsf{T}$ das zu $\mathfrak{P}$ gehörige Verengungsideal in T, und setzt man $K^{(\mathsf{T})} = \mathsf{T} \mid \mathfrak{P}_\mathsf{T}$, so gestattet, wenn ν den Grad von $\mathfrak{P}$ bez. T angibt, der Restklassenkörper $\Sigma \mathfrak{P} = K$ als der zu $\mathfrak{P}$ gehörige Gradmodul eine Darstellung $K = K^{(\mathsf{T})}(\pi_1) \dotplus \ldots \dotplus K^{(\mathsf{T})}(\pi_\nu)$ durch zyklische, zyklisch direkt unzerlegbare $K^{(\mathsf{T})}$-Moduln $K^{(\mathsf{T})}(\pi_i)$. Nach dem Hilfssatz hat man für den zu $\mathfrak{Q}$ gehörigen Gradmodul Q eine Darstellung $Q = K(q_1) \dotplus \ldots \dotplus K(q_\lambda)$. Wie beim Beweise dieses Satzes schließt man, daß die $\lambda \cdot \nu$ zyklischen $K^{(\mathsf{T})}$-Moduln $K^{(\mathsf{T})}(q_i \pi_j)$ zyklisch direkt unzerlegbar sind. Ihre Summe wird Q. Sie ist direkt bez. des Nullmoduls; denn aus $0 = \sum_{i,j} \{k_{i,j}\}(q_i \pi_j)$ folgt zunächst $0 = \sum_j \{k_{i,j}\}(\pi_j)$ und daraus, daß alle Elemente $\{k_{i,j}\}$ verschwinden. Damit ist der Satz bewiesen.

---

[20]) In den Beweisen wird $\mathfrak{M}$ stets als vom Einheitsideal verschieden vorausgesetzt, da für dieses alle Behauptungen sofort einleuchten.

§ 4.

Die Norm eines Ideals.

1. Normen bezüglich eines Hauptidealringes. Wie in § 3, 3 sei Σ eine endliche nullteilerfreie P-Ordnung; P sei *Hauptidealring*. Ist dann der P-Modul Σ vom Rang n, so besitzt, wie leicht zu sehen, jedes vom Nullideal verschiedene Ideal aus Σ als P-Modul denselben Rang. Erinnert man sich an die Entwicklungen aus § 1, 4 b), so kommt man zu

Definition 1. Die *Norm* $N(\mathfrak{A})$ *eines vom Nullideal verschiedenen Ideals* $\mathfrak{A}$ *aus* Σ *bez.* P ist definiert als $N(\Sigma|\mathfrak{A})$; die *Norm des Nullideals aus* Σ als das Nullideal in P.

Es besteht der

Satz 1. *Die Norm eines Ideals ist gleich dem Produkt der Normen seiner größten primären Komponenten.*

Beweis. Sei die Darstellung von $\mathfrak{A}$ gegeben durch $\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}_1 \dots \mathfrak{Q}_s = \mathfrak{Q}_1 - \dots - \mathfrak{Q}_s$. Dann wird $N(\mathfrak{A}) = N(\Sigma|\mathfrak{A}) = N(\Sigma|\mathfrak{Q}_1) \cdot N(\mathfrak{Q}_1|\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2) \cdot \dots \cdot N(\mathfrak{Q}_1 \dots \mathfrak{Q}_{s-1}|\mathfrak{A})$. Nach dem II. Isomorphiesatz wird $\mathfrak{Q}_1 \dots \mathfrak{Q}_{\nu-1}|\mathfrak{Q}_1 \dots \mathfrak{Q}_{\nu-1}\mathfrak{Q}_\nu \cong \Sigma|\mathfrak{Q}_\nu$, also nach § 9, 4b) weiter $N(\mathfrak{Q}_1 \dots \mathfrak{Q}_{\nu-1}|\mathfrak{Q}_1 \dots \mathfrak{Q}_{\nu-1}\mathfrak{Q}_\nu) = N(\Sigma|\mathfrak{Q}_\nu) = N(\mathfrak{Q}_\nu)$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Ferner hat man

Satz 2. *Ist* $\mathfrak{Q}$ *Primärideal der Länge* λ *mit* $\mathfrak{P}$ *als zugehörigem Primideal, so wird* $N(\mathfrak{Q}) = (N(\mathfrak{P}))^\lambda$. [21])

Beweis. Ist $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0, \mathfrak{Q}_1, \dots, \mathfrak{Q}_\lambda = \Sigma$ eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{Q}$, so ist nach der Folgerung des Satzes 3 aus § 1, 2 das Restklassensystem $\mathfrak{Q}_i|\mathfrak{Q}_{i-1}$ modulisomorph dem Restklassenkörper $\Sigma|\mathfrak{P}$. Daraus folgt die Behauptung unter Anwendung derselben Schlußweise wie beim Beweise des vorhergehenden Satzes.

Der *Zusammenhang zwischen Norm und Grad eines Ideals* wird geliefert durch den

Satz 3. *Der Grad eines vom Nullideal verschiedenen Ideals* $\mathfrak{A}$ *in* Σ *bez.* P *ist gleich der Anzahl der miteinander identischen oder voneinander verschiedenen, vom Einheitsideal* P *verschiedenen Primidealfaktoren, in die* $N(\mathfrak{A})$ *in* P *zerfällt.*

Unter Berücksichtigung der für Grad und Norm geltenden Gesetze reicht es hin, zu zeigen, daß die Norm eines Primideals $\mathfrak{P}$ aus Σ gleich

---

[21]) In einem Ring mit Einheitselement werde unter $\mathfrak{A}^0$ bei beliebigem Ideal $\mathfrak{A}$ stets das Einheitsideal verstanden.

wird einer Primidealpotenz $\mathfrak{p}^\varrho$ in P, wo ϱ den Grad von $\mathfrak{P}$ bez. P bezeichnet. Das aber geschieht so[22]):

Σ und $\mathfrak{P}$ sind endliche P-Moduln. Bezeichnen nun $e_1, \ldots, e_n$ die deshalb existierenden Elementarteiler von Σ nach $\mathfrak{P}$ mit $e_i \equiv 0 (\mathsf{P} e_{i+1})$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, so hat man nach der Theorie der Elementarteiler die Darstellungen

$$\Sigma = \mathsf{P}\xi_1 + \ldots + \mathsf{P}\xi_n$$

und

$$\mathfrak{P} = \mathsf{P} e_1 \xi_1 + \ldots + \mathsf{P} \cdot e_\varrho \xi_\varrho + \mathsf{P} \cdot \xi_{\varrho+1} + \ldots + \mathsf{P} \cdot \xi_n,$$

und es wird noch das Hauptideal $\mathsf{P} e_1$ gleich dem zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Verengungsideal in P, also gleich einem Primideal $\mathfrak{p}$. Aus den Teilbarkeitsrelationen folgt $\mathsf{P} e_1 = \ldots = \mathsf{P} e_\varrho = \mathfrak{p}$, und daraus wegen $N(\mathfrak{P}) = \mathsf{P} e_1 \ldots e_n$ die Beziehung $N(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}^\varrho$ mit $\varrho \leqq n$. ϱ aber ist der Grad von $\mathfrak{P}$ bez. P. Bedeutet nämlich $\mathfrak{K}$ den Restklassenkörper $\mathsf{P} | \mathfrak{p}$, so wird $\Sigma | \mathfrak{P}$ der zu $\mathfrak{P}$ gehörige Gradmodul und $\Sigma | \mathfrak{P} = (\Sigma) = \mathfrak{K}(\xi_1) + \ldots + \mathfrak{K}(\xi_\varrho)$. Die Summe ist wirklich direkt; denn aus $(0) = \{k_1\}(\xi_1) + \ldots + \{k_\varrho\}(\xi_\varrho)$ folgt $k_1 \xi_1 + \ldots + k_\varrho \xi_\varrho \equiv 0 (\mathfrak{P})$, also wegen der Darstellung von $\mathfrak{P}$ weiter $k_i \equiv 0 (\mathfrak{p})$ $(i = 1, \ldots, \varrho)$ und damit schließlich $\{k_1\} = \ldots = \{k_\varrho\} = \{0\}$, w. z. b. w.

2. Normen bezüglich eines Multiplikationsringes. Die Entwicklungen in 1. erlauben unter gewissen weiteren Einschränkungen eine Theorie der Normen in bezug auf Multiplikationsringe aufzustellen, die mit der soeben gegebenen völlig parallel läuft. Dazu sei P ein nullteilerfreier Multiplikationsring, $\mathfrak{K} = Q(\mathsf{P})$ sein Quotientenkörper, $\mathfrak{L}$ endliche Erweiterung erster Art von $\mathfrak{K}$, Σ eine endliche P-Ordnung aus $\mathfrak{L}$.

$\mathfrak{N}$ bezeichne ein vom Nullideal verschiedenes Ideal aus Σ, $\mathfrak{m}$ sein Verengungsideal in P, M das System der zu $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\Sigma$ teilerfremden Elemente aus Σ, m das der zum Ideal $\mathfrak{m}$ teilerfremden aus P. Der Quotientenring $\Sigma' = \frac{\Sigma}{M}$ ist nach § 2, Satz 4 endliche Ordnung bez. des Hauptidealringes $\mathsf{P}' = \frac{\mathsf{P}}{m}$. $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}\Sigma'$ sei das Eweiterungsideal von $\mathfrak{N}$ bez. Σ, $N'(\mathfrak{N}')$ die Norm von $\mathfrak{N}'$ bez. P', die stets existiert, da nach § 2, Satz 4 der Ring Σ' endliche P'-Ordnung ist.

Definition 2. Die Norm des vom Nullideal verschiedenen Ideals $\mathfrak{N}$ bez. P ist definiert als das durch $N'(\mathfrak{N}')$ in P erzeugte Verengungsideal, $N(\mathfrak{N}) = N'(\mathfrak{N}') - \mathsf{P}$; die Norm des Nullideals aus Σ ist das Nullideal in P.

Man überzeugt sich zunächst, daß diese Definition mit der in 1. gegebenen übereinstimmt, falls P speziell Hauptidealring ist. Für den Fall

[22]) Diese Schlußweise verdanke ich einer E. Noetherschen Vorlesung im Sommer 1925.

des Nullideals ist das klar, für die andern Ideale hilft folgende, auch weiterhin benutzte

Bemerkung. $\mathfrak{R}$ sei ein nullteilerfreier Hauptidealring mit dem Quotientenkörper $\overline{\mathfrak{R}} = Q(\mathfrak{R})$, $\overline{\mathfrak{L}}$ eine endliche Erweiterung 1. Art von $\overline{\mathfrak{R}}$, $\mathfrak{S}$ eine endliche $\mathfrak{R}$-Ordnung aus $\overline{\mathfrak{L}}$. $\mathfrak{h}$ bedeute ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{H}$ sein Erweiterungsideal in $\mathfrak{S}$, $H(h)$ das System der zu $\mathfrak{H}(\mathfrak{h})$ teilerfremden Elemente aus $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$; $\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{S}}{H}$ und $\mathfrak{R}' = \frac{\mathfrak{R}}{h}$ seien die entsprechenden Quotientenringe.

Sind dann $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{M}'$ *einander entsprechende ausgezeichnete Ideale aus* $\mathfrak{S}$ *und* $\mathfrak{S}'$, und wird die Norm beidemal im alten Sinn (nach 1.) genommen, so ist *die Norm von* $\mathfrak{M}$ *bez.* $\mathfrak{R}$ *gleich dem aus der Norm von* $\mathfrak{M}'$ *bez.* $\mathfrak{R}'$ *in* $\mathfrak{R}$ *erzeugten Verengungsideal.*

Beweis. $\mathfrak{h}$ darf als vom Null- und Einheitsideal verschieden angenommen werden, da sonst wegen $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ bzw. $\overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{S}'$, $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}'$ die Behauptung trivial ist; ebenso kann man bei $\mathfrak{h} \neq (0)$ das Ideal $\mathfrak{M}$ und damit nach der Bemerkung aus § 3, 3 auch $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} - \mathfrak{R}$ als vom Nullideal verschieden annehmen, da für $\mathfrak{M} = (0)$ die Bemerkung stimmt.

Zunächst sieht man, daß sich auch die beiden Verengungsideale $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} - \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{m}' = \mathfrak{M}' - \mathfrak{R}'$ als ausgezeichnete Ideale aus $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ einander entsprechen. Nach der Theorie der Quotientenringe (G. § 6) genügt dazu der Nachweis, daß $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' - \mathfrak{R}$ wird. Es ist aber $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} - \mathfrak{R} = \mathfrak{M} - (\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}) = (\mathfrak{M}' - \mathfrak{S}) - (\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}) = (\mathfrak{M}' - \mathfrak{R}') - \mathfrak{R}$ $= \mathfrak{m}' - \mathfrak{R}$, w. z. b. w.

Die Norm von $\mathfrak{M}'$ bez. $\mathfrak{R}'$ ist das Produkt der Elementarteiler von $\mathfrak{S}'$ nach $\mathfrak{M}'$, die von $\mathfrak{M}$ bez. $\mathfrak{R}$ das Produkt derjenigen von $\mathfrak{S}$ nach $\mathfrak{M}$. Nach Satz 2 aus § 2 wird $\mathfrak{S}' \mid \mathfrak{M}' \simeq \mathfrak{S} \mid \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{R}' \mid \mathfrak{m}' \simeq \mathfrak{R} \mid \mathfrak{m}$; also sind die in $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{m}$ gelegenen Restklassenideale der Elementarteiler von $\mathfrak{S}$ nach $\mathfrak{M}$ den in $\mathfrak{R}' \mid \mathfrak{m}'$ gelegenen Restklassenidealen der Elementarteiler von $\mathfrak{S}'$ nach $\mathfrak{M}'$ durch die Isomorphie $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{m} \simeq \mathfrak{R}' \mid \mathfrak{m}'$ zugeordnet. Nach der Theorie der Elementarteiler ist $\mathfrak{m}(\mathfrak{m}')$ der höchste der Elementarteiler von $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}')$ nach $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}')$, alle andern sind Teiler von $\mathfrak{m}(\mathfrak{m}')$. Deshalb ergibt sich nach dem zweiten Teil des Satzes 2 aus § 2: die Elementarteiler von $\mathfrak{S}$ nach $\mathfrak{M}$ sind die Verengungsideale bez. $\mathfrak{R}$ der entsprechenden von $\mathfrak{S}'$ nach $\mathfrak{M}'$. Somit wird nach der Theorie der Quotientenringe auch $N(\mathfrak{M})$ als ihr Produkt Verengungsideal des Produktes der entsprechenden, d. h. von $N'(\mathfrak{M}')$, w. z. b. w.

Um nun die Äquivalenz beider Normdefinitionen bei solchen Idealen $\mathfrak{M}$ einzusehen, die vom Nullideal verschieden sind, hat man nur $\mathfrak{R} = \mathsf{P}$, $\mathfrak{S} = \Sigma$ und $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} = \mathfrak{M} - \mathsf{P}$ zu setzen.

Die Sätze 1, 2 *und* 3 *gelten unverändert auch, wenn* P *Multiplikationsring ist.* Bei den Beweisen dürfen die betrachteten Ideale als vom Null- und Einheitsideal verschieden vorausgesetzt werden.

Beweis von Satz 1. Sei in Σ die Darstellung des Ideals $\mathfrak{N}$ gegeben durch $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q}_1 \dots \mathfrak{Q}_s$. $\mathfrak{m} = \mathfrak{N} - \mathsf{P}$ sei das Verengungsideal von $\mathfrak{N}$ bez. P; $\Sigma' = \frac{\Sigma}{M}$ und $\mathsf{P}' = \frac{\mathsf{P}}{m}$ die wie in Satz 4 aus § 2 gebildeten Quotientenringe. Bedeutet $\mathfrak{q}_i$ das durch $\mathfrak{Q}_i$ in P erzeugte Verengungsideal, so ist jedes zu $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\Sigma$) teilerfremde Element aus $\mathsf{P}(\Sigma)$ auch teilerfremd zu $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{q}_i\Sigma)$; also umfaßt jeder der entsprechend gebildeten Quotientenringe $\mathsf{P}_i = \frac{\mathsf{P}}{\mathfrak{q}_i}$ bzw. $\Sigma_i = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Q}_i}$ den Ring P' bzw. Σ' ($i = 1, \dots, s$). Für jeden Index i sind $\mathfrak{Q}_i\Sigma'$ und $\mathfrak{Q}_i\Sigma_i$ einander entsprechende ausgezeichnete Ideale aus Σ' und Σ_i, weil beide durch Verengung nach Σ dort $\mathfrak{Q}_i$ ergeben. Somit wird die Norm von $\mathfrak{Q}_i\Sigma'$ bez. P' gleich dem aus der Norm von $\mathfrak{Q}_i\Sigma_i$ bez. P_i in P' erzeugten Verengungsideal, also die Norm von $\mathfrak{Q}_i$ bez. P gleich dem aus der Norm von $\mathfrak{Q}_i\Sigma'$ bez. P' in P erzeugten Verengungsideal. Man hat nun in Σ' die Beziehungen $(\mathfrak{N}\Sigma') = (\mathfrak{Q}_1\Sigma') \dots (\mathfrak{Q}_s\Sigma')$, somit nach Satz 1 aus 1. für die Normen bezüglich P' weiter $N'(\mathfrak{N}\Sigma') = N'(\mathfrak{Q}_1\Sigma') \dots N'(\mathfrak{Q}_s\Sigma')$, also nach der Theorie der Quotientenringe auch

$$N(\mathfrak{N}) = N'(\mathfrak{N}\Sigma') - \mathsf{P} = (N'(\mathfrak{Q}_1\Sigma') - \mathsf{P}) \dots (N'(\mathfrak{Q}_s\Sigma') - \mathsf{P}) = N(\mathfrak{Q}_1) \dots N(\mathfrak{Q}_s),$$

w. z. b. w. — Noch einfacher gestalten sich die übrigen Beweise.

Beweis von Satz 2. $\mathfrak{Q}$ sei ein Primärideal der Länge λ und mit $\mathfrak{P}$ als zugehörigem Primideal, $\mathfrak{m} = \mathfrak{Q} - \mathsf{P}$ sein Verengungsideal in P, $\mathsf{P}' = \frac{\mathsf{P}}{m}$ und $\Sigma' = \frac{\Sigma}{M}$ die nach Satz 4 aus § 2 gebildeten Quotientenringe. In Σ' wird nach Satz 2 aus 1. die bez. P' genommene Norm $N'(\mathfrak{Q}\Sigma') = N'(\mathfrak{P}\Sigma')^{\lambda'}$, wo λ' die Länge von $\mathfrak{Q}\Sigma'$ in Σ' angibt. Wegen $\Sigma' | \mathfrak{Q}\Sigma' \simeq \Sigma | \mathfrak{Q}$ ist $\lambda' = \lambda$; ferner schließt man wie beim Beweise des vorigen Satzes, daß $N'(\mathfrak{P}\Sigma') - \mathsf{P} = N(\mathfrak{P})$ wird. Also hat man wie vorhin

$$N(\mathfrak{Q}) = N'(\mathfrak{Q}\Sigma') - \mathsf{P} = (N'(\mathfrak{P}\Sigma') - \mathsf{P})^{\lambda'} = N(\mathfrak{P})^{\lambda}, \text{ w. z. b. w.}$$

Beweis von Satz 3. Unter Berücksichtigung der Gültigkeit der Sätze 1 und 2 reicht es wieder hin, zu zeigen, daß die Norm eines Primideals $\mathfrak{P}$ bez. P gleich wird einer Primidealpotenz $\mathfrak{p}^{\varrho}$, wo ϱ den Grad von $\mathfrak{P}$ bez. P angibt. Sei nun $\mathfrak{m} = \mathfrak{P} - \mathsf{P}$, während $\mathsf{P}' = \frac{\mathsf{P}}{m}$ und $\Sigma' = \frac{\Sigma}{M}$ die nach Satz 4 aus § 2 gebildeten Quotientenringe bezeichnen. Nach Satz 3 aus 1. wird die bez. P' genommene Norm $N'(\mathfrak{P}\Sigma') = \mathfrak{p}'^{\varrho'}$, wo $\mathfrak{p}' = \mathfrak{P}\Sigma' - \mathsf{P}'$ Primideal in P' ist und ϱ' den Grad von $\mathfrak{P}\Sigma'$ bez. P' bedeutet. $\mathfrak{p}$ be-

deute das durch $\mathfrak{p}'$ in P erzeugte Verengungsideal; es wird dann $\mathfrak{p}$ auch das durch $\mathfrak{P}$ aus Σ erzeugte Verengungsideal; denn man hat $\mathfrak{P} - \mathsf{P} = (\mathfrak{P}\Sigma' - \Sigma) - \mathsf{P} = (\mathfrak{P}\Sigma' - \mathsf{P}') - \mathsf{P} = \mathfrak{p}' - \mathsf{P}$. Wegen $\mathsf{P} \mid \mathfrak{p} \cong \mathsf{P}' \mid \mathfrak{p}'$ und $\Sigma \mid \mathfrak{P} \cong \Sigma' \mid \mathfrak{P}\Sigma'$ ist der Grad ϱ von $\mathfrak{P}$ bez. P als eine allein durch $\mathsf{P} \mid \mathfrak{p}$ und $\Sigma \mid \mathfrak{P}$ bestimmte Zahl gleich dem Grad ϱ' von $\mathfrak{P}\Sigma'$ bez. P'. Demnach kommt $N(\mathfrak{P}) = N'(\mathfrak{P}\Sigma') - \mathsf{P} = (\mathfrak{p}' - \mathsf{P})^{\varrho'} = \mathfrak{p}^{\varrho}$, w. z. b. w.

Ist in 1. oder 2. Σ Multiplikationsring, so beweist man mittels der Sätze 1 und 2 sowie der eindeutigen Darstellbarkeit jedes Ideals $\mathfrak{M}$ aus Σ als Produkt von Primidealpotenzen die Gültigkeit der Formel $N(\mathfrak{AB}) = N(\mathfrak{A})N(\mathfrak{B})$ für beliebige Ideale $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ aus Σ. Hingegen ist in jedem P umfassenden echten Unterring T von Σ mit dem Quotientenkörper $Q(\mathsf{T}) = Q(\Sigma)$ die eben erwähnte Beziehung wenigstens einmal nicht erfüllt. Nach N. § 9, 8 nämlich gibt es in solchen T wenigstens ein Primideal $\mathfrak{P}$ derart, daß $\mathfrak{P}^2$ reduzibel, d. h. kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches $\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C}_2$ von zwei echten Teilern $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ wird (vgl. hier § 6, 1). Jede dieser Komponenten ist echtes Vielfaches von $\mathfrak{P}$, also besitzt $\mathfrak{P}^2$ eine Länge $\lambda \geqq 3$. Nach den Normgesetzen wird dann

$$N(\mathfrak{P}^2) = (N(\mathfrak{P}))^{\lambda} \geqq (N(\mathfrak{P}))^3 > (N(\mathfrak{P}))^2 = N(\mathfrak{P}) \cdot N(\mathfrak{P}).$$

3. Für die Ideale der Hauptordnung eines endlichen algebraischen Zahlkörpers ist von Hilbert[23]) noch eine andere Definition der Norm gegeben worden. Ihre Äquivalenz mit der in 2. aufgestellten allgemeineren soll im folgenden gezeigt werden.

P, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ mögen dieselbe Bedeutung wie in 2. haben; Σ sei eine endliche P-Ordnung aus $\mathfrak{L}$, die in ihrem Quotientenkörper $Q(\Sigma)$, der ohne Beschränkung der Allgemeinheit als mit $\mathfrak{L}$ identisch angenommen werden darf, algebraisch ganz abgeschlossen sei. Dann ist Σ Multiplikationsring[24]). $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_n$ bedeuten die n bez. $\mathfrak{K}$ konjugierten Körper, $\mathfrak{G}$ der aus ihnen gebildete Galoissche Körper, $\Sigma = \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ die n untereinander konjugierten Hauptordnungen aus $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_n$, $\mathfrak{S}$ die Hauptordnung aus $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{A}_i(\alpha_i)$ bezeichne stets ein Ideal (Element) aus Σ_i, $\mathfrak{A}_j(\alpha_j)$ das hierzu konjugierte in Σ_j. Dann hat man folgende, der Hilbertschen entsprechende

Definition 3. Die Norm $n(\mathfrak{A})$ des Ideals $\mathfrak{A}$ aus Σ bez. P ist definiert als das durch $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{S}) \ldots (\mathfrak{A}_n\mathfrak{S})$ in P erzeugte Verengungsideal.

Das Verhältnis der beiden Normbegriffe $N(\mathfrak{A})$ und $n(\mathfrak{A})$ findet seine Klärung in dem

---

[23]) Siehe Hilbert, Zahlbericht, § 14.

[24]) Vgl. hier § 1, 3.

Satz 4. *Die Norm $N(\mathfrak{A})$ und die Norm $n(\mathfrak{A})$ sind identisch. Das Erweiterungsideal $N(\mathfrak{A})\mathfrak{S} = n(\mathfrak{A})\mathfrak{S}$ wird das Produkt $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{S})\dots(\mathfrak{A}_n\mathfrak{S})$ der zueinander konjugierten Ideale $\mathfrak{A}_1\mathfrak{S}, \dots, \mathfrak{A}_n\mathfrak{S}$.*

Beweis. Offenbar darf $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$ als vom Null- und Einheitsideal verschieden vorausgesetzt werden. $\mathfrak{m}$ sei das durch $\mathfrak{A}$ in P erzeugte Verengungsideal, $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{m}\Sigma_i$ und $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\mathfrak{S}$ die zugehörigen Erweiterungsideale von $\mathfrak{m}$; $\mathsf{P}' = \frac{\mathsf{P}}{m}$, $\Sigma_i' = \frac{\Sigma_i}{M_i}$, $\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{S}}{M}$ die nach § 2, Satz 4 gebildeten Quotientenringe.

Durch Multiplikation mit einem zu $\mathfrak{M}_i \neq (0)$ teilerfremden Ideal $\mathfrak{C}_i$ aus Σ_i werde $\mathfrak{A}_i$ in ein Hauptideal $\alpha_i\Sigma_i = \mathfrak{A}_i\mathfrak{C}_i$ verwandelt. Dann folgt aus $\alpha_i\Sigma_i' = \mathfrak{A}_i\Sigma_i'$ weiter $\alpha_i\mathfrak{S}' = \mathfrak{A}_i\mathfrak{S}'$, weil wegen $\mathfrak{M}_i\mathfrak{S} = \mathfrak{m}\mathfrak{S}$ offenbar Σ_i' in $\mathfrak{S}'$ enthalten ist $(i = 1, \dots, n)$. Wird $\alpha_1 = \alpha$ gesetzt, so kommt demnach $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{S}')\dots(\mathfrak{A}_n\mathfrak{S}') = (\alpha_1\mathfrak{S}')\dots(\alpha_n\mathfrak{S}') = (\alpha_1\dots\alpha_n)\mathfrak{S}' = n(\alpha)\cdot\mathfrak{S}'$, wo wie üblich $n(\alpha) = \alpha_1\dots\alpha_n$ gesetzt ist; $n(\alpha)$ ist Element von P.

Für $\Sigma' = \Sigma_1'$ wird ferner die bez. P' genommene Norm $N'(\alpha\Sigma')$ des Hauptideals $\alpha\Sigma'$ gleich dem Hauptideal $n(\alpha)\cdot\mathsf{P}'$. Um das einzusehen, sei $\sigma_i^{(1)}, \dots, \sigma_i^{(n)}$ eine bez. P' linear unabhängige Modulbasis von Σ_i'. Dann wird mit Koeffizienten c_{ij} aus P' erfüllt

$$\alpha_i\,\sigma_i^{(\nu)} = c_{\nu 1}\,\sigma_i^{(1)} + \dots + c_{\nu n}\,\sigma_i^{(n)},$$

wo i und ν unabhängig voneinander alle Werte $1, \dots, n$ durchlaufen. Also wird nach einfachen Determinantensätzen

$$|\alpha_i\,\sigma_i^{(\nu)}| = n(\alpha)\cdot|\sigma_i^{(\nu)}| = |c_{ij}|\cdot|\sigma_i^{(\nu)}|.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $\sigma_i^{(\nu)}$ bez. P' wird $|\sigma_i^{(\nu)}| \neq 0$ und somit $|c_{ij}| = n(\alpha)$, also $|c_{ij}|\cdot\mathsf{P}' = N'(\alpha\Sigma') = n(\alpha)\cdot\mathsf{P}'$, w. z. b. w.

Demnach kommt nun

$$\begin{aligned} N(\mathfrak{A})\cdot\mathfrak{S}' &= N(\mathfrak{A})\cdot\mathsf{P}'\cdot\mathfrak{S}' = N'(\mathfrak{A}\Sigma')\cdot\mathfrak{S}' = N'(\alpha\Sigma')\cdot\mathfrak{S}' \\ &= n(\alpha)\cdot\mathsf{P}'\cdot\mathfrak{S}' = n(\alpha)\cdot\mathfrak{S}' = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{S}')\dots(\mathfrak{A}_n\mathfrak{S}'). \end{aligned}$$

Der Satz wird ganz bewiesen sein, wenn gezeigt werden kann, daß das durch $N(\mathfrak{A})\cdot\mathfrak{S}'$ in $\mathfrak{S}$ erzeugte Verengungsideal $N(\mathfrak{A})\cdot\mathfrak{S}' - \mathfrak{S} = N(\mathfrak{A})\cdot\mathfrak{S}$ ist. Dann nämlich hat man

$$\begin{aligned} N(\mathfrak{A})\cdot\mathfrak{S} &= N(\mathfrak{A})\cdot\mathfrak{S}' - \mathfrak{S} = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{S}')\dots(\mathfrak{A}_n\mathfrak{S}') - \mathfrak{S} \\ &= (\mathfrak{A}_1\mathfrak{S}' - \mathfrak{S})\dots(\mathfrak{A}_n\mathfrak{S}' - \mathfrak{S}) = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{S})\dots(\mathfrak{A}_n\mathfrak{S}), \end{aligned}$$

und da nach § 2, 2 $N(\mathfrak{A})$ Verengungsideal bez. $\mathfrak{S}$ ist, hat man damit auch den ersten Teil des Satzes.

Um aber $N(\mathfrak{A})\mathfrak{S}' - \mathfrak{S} = N(\mathfrak{A})\mathfrak{S}$ einzusehen, bedenke man, daß $N'(\mathfrak{A}\Sigma')$ das aus dem Produkt der Elementarteiler von Σ' nach $\mathfrak{A}\Sigma'$ abgeleitete Hauptideal ist und daß das aus jedem einzelnen Elementen-

teiler abgeleitete Hauptideal ein Idealteiler des höchsten $\mathfrak{m}' = \mathfrak{A}\Sigma' - \mathsf{P}'$ unter ihnen wird; somit bildet $N(\mathfrak{A})$ wegen $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' - \mathsf{P}$ ein Produkt von Idealen, die sämtlich Teiler von $\mathfrak{m}$ sind. Deshalb kann in $N(\mathfrak{A})$ kein zu $\mathfrak{m}$ teilerfremdes, vom Einheitsideal P verschiedenes Primideal, also auch in $N(\mathfrak{A})\mathfrak{S}$ kein zu $\overline{\mathfrak{M}}$ teilerfremdes, von $\mathfrak{S}$ verschiedenes Primideal aufgehen. Denn wenn $N(\mathfrak{A})\mathfrak{S} \geqq \mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{M}} < \| \mathfrak{P}$ wäre, hätte man für das aus dem Primideal $\mathfrak{P}$ in P erzeugten Verengungsprimideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} - \mathsf{P}$ die Beziehungen $N(\mathfrak{A}) \geqq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m} < \| \mathfrak{p}$, weil jedes Ideal aus P Verengungsideal bez. $\mathfrak{S}$ wird. Somit wird nach Satz 1 aus § 2 das Ideal $N(\mathfrak{A})\mathfrak{S}$ Verengungsideal bez. $\mathfrak{S}'$, und damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

Durch die Betrachtungen der §§ 3, 4 ist nach der Schlußbemerkung von § 1, 3 und unter Berücksichtigung von N. § 3 eine Theorie des Grades und der Norm von Idealen in beliebigen endlichen Ordnungen und Relativordnungen algebraischer Zahlkörper sowie anderen ihnen verwandten Bereichen gegeben. Sie umfaßt die bisher nur für die Hauptordnung der Zahlkörper bekannten Entwicklungen; insbesondere noch stimmt hier die von Dedekind gegebene Graddefinition (Z. IV, § 180) wegen Satz 3 mit der in § 3 dieser Arbeit aufgestellten überein. Dasselbe gilt für die algebraischen Funktionen einer Veränderlichen mit algebraisch abgeschlossenem Koeffizientenkörper K beim Grundbereich $\mathfrak{R} = K[z]$.[25])

§ 5.

Charakterisierung der Führer.

1. Wie früher bezeichne Σ eine endliche nullteilerfreie, von ihrem Grundbereich P verschiedene P-Ordnung mit einem in P gelegenen Einheitselement; P sei Multiplikationsring. Es gilt also in allen P-Ordnungen T aus Σ die in § 1, 2 gegebene Idealtheorie. Alle Elemente aus Σ sind nach § 1, 1 P-ganz, und nach § 1, 3 ist P in seinem Quotientenkörper $\mathfrak{R} = Q(\mathsf{P})$ algebraisch ganz abgeschlossen. Schließlich kann man vom Grad eines Ideals aus Σ bez. P sprechen, da Σ endlicher P-Modul ist.

Es handelt sich um die Charakterisierung derjenigen Ideale aus Σ, die Führer $\mathsf{T} : \Sigma$ nach P umfassenden Unterordnungen T von Σ sind. Die Frage findet ihre Erledigung in dem

Führer-Satz[26]). *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Ideal* $\mathfrak{f}$ *aus* Σ *Führer* $\mathfrak{f} = \mathsf{T} : \Sigma$ *eines* P *umfassenden Unterringes* T *von* Σ *wird, besteht darin*:

[25]) Siehe Dedekind-Weber, Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen § 7, Journ. f. Math. **92** (1882), S. 181–290.

[26]) Das Resultat lag für die Hauptordnung endlicher algebraischer Zahlkörper vor: Es steht schon bei Dedekind, Über die Diskriminanten endlicher Körper, Fuß-

a) T *und* Σ *haben verschiedene Quotientenkörper*: $\mathfrak{f} = (0)$;

b) T *und* Σ *haben identische Quotientenkörper*:

1. $\mathfrak{f} \neq (0)$;

2. *bedeutet* $\mathfrak{p}$ *ein beliebiges zu* $\mathfrak{f}$ *gehöriges Primideal* 1. *Grades* (*bez.* P) *aus* Σ, *so erzeugen* $\mathfrak{f}$ *und* $\mathfrak{f} : \mathfrak{p}$ *in* P *dasselbe Verengungsideal.*

Bemerkung. T und Σ haben dann und nur dann denselben Quotientenkörper $Q(\mathsf{T}) = Q(\Sigma)$, wenn T und Σ von gleichem Rang bez. $\mathfrak{R} = Q(\mathsf{P})$ sind, d. h. dieselbe Maximalzahl bez. $\mathfrak{R}$ linear unabhängiger Elemente besitzen[27]).

Durch diesen Satz werden also u. a. die Führer in beliebigen Ordnungen endlicher algebraischer Zahlkörper sowie den andern in N. § 3 angeführten Bereichen bestimmt.

Beim Beweis des Führersatzes wird der Fall a) rasch erledigt; kaum umständlicher ergibt sich die Notwendigkeit der ausgesprochenen Bedingungen im Fall b). Um aber den Nachweis des Hinreichens zu führen, ist es einmal notwendig, die Struktur des Ringes Σ noch genauer zu untersuchen, als dies bereits in § 1, 2 geschah; zum andern müssen die dort gebrachten Entwicklungen selbst mit herangezogen werden. Zur weiteren Aufhellung der Struktur nun dienen die beiden folgenden Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Ist $\mathfrak{a}$ vom Nullideal verschieden und $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$, so existiert stets ein unmittelbarer Teiler $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} > \mathfrak{c} \geqq \mathfrak{b}$. — Das folgt direkt aus dem Doppelkettensatz.

Ist $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$ und hat man in eindeutiger Darstellung durch paarweise teilerfremde größte primäre Komponenten $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_s$, $\mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{q}}_1 \dots \bar{\mathfrak{q}}_r$, so ist $r \leqq s$, und man kann sich die Komponenten so angeordnet denken, daß $\mathfrak{q}_j \geqq \bar{\mathfrak{q}}_j$ wird ($j = 1, \dots, r$). Setzt man für $r < s$ die Ideale $\bar{\mathfrak{q}}_{r+1} = \dots = \bar{\mathfrak{q}}_s = \Sigma$, so sollen $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_s$ und $\mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{q}}_1 \dots \bar{\mathfrak{q}}_r \bar{\mathfrak{q}}_{r+1} \dots \bar{\mathfrak{q}}_s$ als normierte Darstellungen bezeichnet werden. Dann besteht der

Hilfssatz 2. $\mathfrak{a}$ sei vom Nullideal verschieden und $\mathfrak{b}$ ein unmittelbarer Teiler; $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_s$ und $\mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{q}}_1 \dots \bar{\mathfrak{q}}_s$ seien die normierten Darstellungen

---

note zu S. 28 (vgl. hier Fußnote [7]) dieser Arbeit). Scheinbar ohne Kenntnis dessen hat Furtwängler in den Wiener Berichten (vgl. Fußnote [8]) die explizite Darstellung aller Führerideale der Hauptordnung $\mathfrak{S}$ eines endlichen algebraischen Zahlkörpers gegeben unter der Annahme, daß die Zerfällung $\mathfrak{S}\, p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}$ jeder rationalen Primzahl p in $\mathfrak{S}$ bekannt ist. Unter dieser Voraussetzung sind die erhaltenen Resultate dem Dedekindschen äquivalent. Vgl. dazu den Schluß dieses Paragraphen.

[27]) Man erkennt: T und $Q(\mathsf{T})$ bzw. Σ und $Q(\Sigma)$ haben gleichen Rang bez. $\mathfrak{R} = Q(\mathsf{P})$. Die Notwendigkeit gleichen Ranges bei $Q(\mathsf{T}) = Q(\Sigma)$ folgt dann sofort; daß sie hinreicht, ergibt sich nach der Steinitzschen Arbeit: Algebraische Theorie der Körper, § 7, 3 [Journ. f. Math. **137** (1910), S. 167—308].

von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Mit Ausnahme eines Index i wird dann $\mathfrak{q}_j = \bar{\mathfrak{q}}_j$ $(j \neq i)$, während $\bar{\mathfrak{q}}_i$ unmittelbarer Teiler von $\mathfrak{q}_i$ wird.

Beweis. Wenigstens eines der $\bar{\mathfrak{q}}_\nu$, etwa $\bar{\mathfrak{q}}_i$, muß echter Teiler des entsprechenden $\mathfrak{q}_i$ sein. Alle andern $\bar{\mathfrak{q}}_\nu$ aber müssen mit den entsprechenden $\mathfrak{q}_\nu$ übereinstimmen, da es sonst zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein von beiden verschiedenes Ideal gäbe; aus demselben Grunde muß $\bar{\mathfrak{q}}_i$ unmittelbarer Teiler von $\mathfrak{q}_i$ werden.

Nunmehr bereitet der Beweis des Führersatzes selbst keine Schwierigkeiten mehr.

Fall a). 1. $\mathfrak{f} = (0)$ *ist notwendig.* Ist nämlich $\mathfrak{f} = \mathsf{T} : \Sigma$ und $\mathfrak{f} \neq (0)$, so ist für ein Element $\varphi \neq 0$ aus $\mathfrak{f}$ erfüllt $\varphi \Sigma \geqq \mathsf{T}$, d. h. ein beliebiges Element σ des Ringes Σ hat die Form $\sigma = \frac{\tau}{\varphi}$, wo τ passend aus T ist. Da auch φ in T liegt, ist σ im Quotientenkörper $Q(\mathsf{T})$ enthalten. Also wird $Q(\Sigma) \leqq Q(\mathsf{T})$. Da wegen $\mathsf{T} \leqq \Sigma$ auch $Q(\mathsf{T}) \leqq Q(\Sigma)$ kommt, hat man $Q(\mathsf{T}) = Q(\Sigma)$.

2. $\mathfrak{f} = (0)$ *ist hinreichend.* In diesem Fall ist nämlich P selbst eine P-Ordnung, nach der $\mathfrak{f}$ Führer $\mathfrak{f} = \mathsf{P} : \Sigma$ wird. Aus $\mathsf{P} : \Sigma \neq (0)$ nämlich würde genau wie eben $\Sigma \leqq Q(\mathsf{P})$ folgen. Da nach § 1, Hilfssatz 1 der Ring Σ aus lauter P-ganzen Elementen besteht, würde sich hieraus wegen der ganzen Abgeschlossenheit von P in $Q(\mathsf{P})$ ergeben $\Sigma \leqq \mathsf{P}$, also $\Sigma = \mathsf{P}$, gegen die Voraussetzung.

Fall b). 1. $\mathfrak{f} \neq (0)$ *ist notwendig.* Als endlicher P-Modul ist Σ von endlichem Rang bez. $\mathfrak{R} = Q(\mathsf{P})$. Sei also $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ein bez. $\mathfrak{R}$ linear irreduzibles System aus Σ, $\tau_1, \ldots, \tau_n$ eines aus T. Wegen $Q(\mathsf{T}) = Q(\Sigma)$ bestehen Relationen $\sigma_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \tau_j$ mit Koeffizienten c_{ij} aus $\mathfrak{R}$. Multipliziert man beiderseits mit dem vom Nullelement verschiedenen gemeinsamen Nenner c_i der c_{ij} $(j = 1, \ldots, n)$, der ein Element aus P ist, so kommt $c_i \sigma_i \equiv 0 (\mathsf{T})$, also für $c_1 \ldots c_n = c \neq 0$ aus P schließlich $c \Sigma \geqq \mathsf{T}$, $c \equiv 0 (\mathfrak{f})$ und deshalb $\mathfrak{f} \neq (0)$.

2. $\mathfrak{f}$ *und* $\mathfrak{f} : \mathfrak{p}$ *müssen in* P *dasselbe Verengungsideal bestimmen, wenn* $\mathfrak{p}$ *vom* 1. *Grade ist.* Der Umstand, daß $\mathfrak{p}$ vom 1. Grade ist, wird identisch damit, daß $\Sigma = \mathsf{P} + \mathfrak{p}$ größter gemeinsamer Teiler der beiden P-Moduln P und $\mathfrak{p}$ wird. Aus $\mathfrak{f} \geqq \mathfrak{f} : \mathfrak{p}$ folgt $\mathsf{P} - \mathfrak{f} \geqq \mathsf{P} - (\mathfrak{f} : \mathfrak{p})$. Wäre die linke Seite echtes Vielfaches der rechten, so ergäbe sich die Existenz eines Elementes ϱ aus P mit $\varrho \equiv 0 (\mathfrak{f} : \mathfrak{p})$, $\not\equiv 0 (\mathfrak{f})$. Wegen $\varrho \cdot \mathfrak{p} \geqq \mathfrak{f}$ wird

$$\mathfrak{f} > \mathfrak{f} + \varrho \Sigma = \mathfrak{f} + \varrho (\mathsf{P} + \mathfrak{p}) = \mathfrak{f} + \varrho \mathsf{P} + \varrho \mathfrak{p} = \mathfrak{f} + \varrho \mathsf{P}.$$

Somit wäre $\mathfrak{f} + \varrho \Sigma$ ein echter Idealteiler von $\mathfrak{f}$, der auch in T liegt; d. h. aber: gegen die Voraussetzung ist $\mathfrak{f}$ nicht Führer $\mathfrak{f} = \mathsf{T} : \Sigma$.

3. *Die Bedingungen sind hinreichend.* Es darf zunächst $\mathfrak{f} \neq \Sigma$ angenommen werden, da man für $\mathfrak{f} = \Sigma$ hat $\mathfrak{f} = \Sigma : \Sigma$. $\mathsf{P} + \mathfrak{f}$ ist ein P umfassender Ring gleichen Ranges bez. $\mathfrak{R}$ wie Σ. Denn wegen $(\mathsf{P} + \mathfrak{f})^2 \geqq \mathsf{P} + \mathfrak{f}$ ist $\mathsf{P} + \mathfrak{f}$ zunächst Ring; ferner enthält das vom Nullideal verschiedene Ideal $\mathfrak{f}$ und folglich auch der Ring $\mathsf{P} + \mathfrak{f}$ die gleiche Anzahl bez. $\mathfrak{R}$ linear unabhängiger Elemente wie Σ. Es wird nachgewiesen, daß $(\mathsf{P} + \mathfrak{f}) : \Sigma = \mathfrak{f}$ wird.

Wäre nämlich der Führer $(\mathsf{P} + \mathfrak{f}) : \Sigma = \mathfrak{g}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{f}$, so müßte auch ein nach Hilfssatz 1 existierender unmittelbarer Teiler $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{f} > \mathfrak{c} \geqq \mathfrak{g}$ Ideal in $\mathsf{P} + \mathfrak{f}$ sein. Sei in normierter Darstellung $\mathfrak{f} = \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_s$, $\mathfrak{c} = \bar{\mathfrak{q}}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_s$ und dabei (nach Hilfssatz 2) $\bar{\mathfrak{q}}_1$ ein unmittelbarer Teiler von $\mathfrak{q}_1$.

Nun kann das zu $\mathfrak{q}_1$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}_1$ nicht 1. Grades bez. P sein. Denn nach § 1, 2, Satz 2 ist zunächst einmal $\bar{\mathfrak{q}}_1 \geqq \mathfrak{q}_1 : \mathfrak{p}_1$. Aus $\mathfrak{f} > \mathfrak{c}$ ergibt sich die Existenz eines Elementes $\tau = \varrho + \varphi$ aus $\mathsf{P} + \mathfrak{f}$ (mit ϱ aus P und φ aus $\mathfrak{f}$) derart, daß $\tau \equiv 0\,(\mathfrak{c})$, $\not\equiv 0\,(\mathfrak{f})$, also auch $\varrho \equiv 0\,(\mathfrak{c})$, $\not\equiv 0\,(\mathfrak{f})$ ist. Demnach würde $\varrho \equiv 0\,(\bar{\mathfrak{q}}_1)$ und $\varrho \equiv 0\,(\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{p}_1)$, $\varrho \equiv 0\,(\mathfrak{q}_j)$ $(j \neq 1)$, also auch, entgegen der Voraussetzung, $\varrho \equiv 0\,((\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{p}_1) - \mathfrak{q}_2 - \ldots - \mathfrak{q}_s = \mathfrak{f} : \mathfrak{p}_1)$.

$\mathfrak{p}_1$ kann aber auch nicht von höheren als 1. Grade bez. P sein. Ist nämlich wieder $\varrho \not\equiv 0\,(\mathfrak{f})$, $\equiv 0\,(\mathfrak{c})$, so kommt $\varrho \not\equiv 0\,(\mathfrak{q}_1)$, $\equiv 0\,(\bar{\mathfrak{q}}_1)$, also weiter $\bar{\mathfrak{q}}_1 = \mathfrak{q}_1 + \varrho\Sigma$. Nach dem II. Isomorphiesatz (G. § 2, 2) ergibt sich ferner $\mathfrak{c} \,|\, \mathfrak{f} = \mathfrak{c} \,|\, \mathfrak{q}_1 - \mathfrak{c} \simeq \mathfrak{c} \,|\, \mathfrak{q}_1 \cong \mathfrak{c} + \mathfrak{q}_1 \,|\, \mathfrak{q}_1$. Es wird aber $\mathfrak{c} + \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_1^* = \bar{\mathfrak{q}}_1$; denn aus $\mathfrak{c}, \mathfrak{q}_1 \geqq \bar{\mathfrak{q}}_1$ folgt zunächst $\mathfrak{q}_1^* \geqq \bar{\mathfrak{q}}_1$. Aus $\mathfrak{q}_1^* + \mathfrak{q}_i = \Sigma$ $(i \neq 1)$ ergibt sich $\mathfrak{c} = \mathfrak{q}_1^* - \mathfrak{q}_2 - \ldots - \mathfrak{q}_s = \mathfrak{q}_1^* \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_s = \bar{\mathfrak{q}}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_s$, also nach Hilfssatz 1 aus G. § 8 schließlich $\mathfrak{q}_1^* = \mathfrak{c} + \mathfrak{q}_1 = \bar{\mathfrak{q}}_1$. Zusammenfassend hat man dann bei Benutzung von Satz 3 aus § 1 die Isomorphien

$$\mathfrak{c} \,|\, \mathfrak{f} \cong \bar{\mathfrak{q}}_1 \,|\, \mathfrak{q}_1 \cong \varrho\Sigma \,|\, \varrho\mathfrak{p}_1 .$$

Wegen der Voraussetzung über $\mathfrak{p}_1$ gibt es in $\Sigma \,|\, \mathfrak{p}_1$ wenigstens eine Klasse (ω), die nicht durch Elemente aus P zu repräsentieren ist. Da $\mathfrak{c}$ Ideal in $\mathsf{P} + \mathfrak{f}$ ist, hat man auf Grund der Isomorphiekoppelung $\omega\varrho = \varrho'(\mathfrak{p}_1 \varrho)$ bei geeignetem ϱ' aus P. Also wird $\omega\varrho = \varrho' + \pi\varrho$ mit $\pi \equiv 0\,(\mathfrak{p}_1)$. $\frac{\varrho'}{\varrho} = \omega - \pi$ aber ist als Element von Σ ein P-ganzes Element aus $\mathfrak{R} = Q(\mathsf{P})$, somit wegen der ganzen Abgeschlossenheit von P in $\mathfrak{R}$ ein Element r aus P. Damit aber würde $\omega \equiv r\,(\mathfrak{p}_1)$, $(\omega) = (r)$, gegen die Voraussetzung.

2. Zum Schluß soll die Äquivalenz der Furtwänglerschen Resultante[28]) mit dem von Dedekind ausgesprochenen Satz im Fall der Hauptordnung $\mathfrak{S}$ eines endlichen algebraischen Zahlkörpers gezeigt werden.

Bei der genaueren Charakterisierung der Führer beschränkt sich Furtwängler auf solche Ideale $\mathfrak{f}$, deren Norm $N(\mathfrak{f})$ gleich einem aus einer

---

[28]) Vgl. Fußnote [6]).

Primzahlpotenz p^r im Ring $\mathfrak{R}$ der ganzen rationalen Zahlen abgeleiteten Hauptideal wird. Das bedeutet nach Hilfssatz 2 aus G. § 8 und der dortigen Schlußbemerkung keine Einschränkung der Allgemeinheit. Es gelten dann die folgenden Behauptungen:

1. In $\mathfrak{S}$ bestehe die Zerlegung $\mathfrak{S}p = \mathfrak{p}_1^{a_1} \dots \mathfrak{p}_n^{a_n}$ mit $n > 1$. Damit $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_n^{e_n}$ Führer wird, ist notwendig und hinreichend: Bezeichnet $\mathfrak{p}_i$ ein Primideal 1. Grades und ist $e_i = 1\,(a_i)$, so ist für wenigstens einen von i verschiedenen Index j erfüllt $e_j > \frac{e_i - 1}{a_i} a_j$, e_j ist größer als $\frac{e_i - 1}{a_i} a_j$.

2. In $\mathfrak{S}$ bestehe die Zerlegung $\mathfrak{S}p = \mathfrak{p}^a$. a) Ist $\mathfrak{p}$ vom 1. Grade, so ist $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^e$ dann und nur dann Führer, wenn $\varepsilon \not\equiv 1\,(a)$ wird. b) Ist $\mathfrak{p}$ von höherem als 1. Grade, so ist $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^e$ stets Führer.

A. *Aus dem Dedekindschen Satz folgen die Furtwänglerschen Bedingungen.*

I. *Die Bedingungen sind notwendig.* Sei im Fall 1 für jedes $j \neq i$ erfüllt $e_j \leqq \frac{e_i - 1}{a_i} a_j$. Setzt man $\frac{e_i - 1}{a_i} = \varrho$, so wird $\mathfrak{S}p^\varrho = \mathfrak{p}_1^{\varrho a_1} \dots \mathfrak{p}_n^{\varrho a_n} \geqq \mathfrak{f}_i : \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_i^{e_i - 1} \dots \mathfrak{p}_n^{e_n}$, aber $\mathfrak{S}p^\varrho < \|\mathfrak{f}$, da $\mathfrak{S}p^\varrho < \|\mathfrak{p}_i^{e_i}$ ist. Demnach wäre $\mathfrak{f} - \mathfrak{R} = \mathfrak{R}p^{\varrho+1} \neq \mathfrak{R}p^\varrho = (\mathfrak{f} : \mathfrak{p}_i) - \mathfrak{R}$, also $\mathfrak{f}$ nicht Führer.

Ähnlich erledigt man 2a; 2b ist sofort klar.

II. *Die Bedingungen reichen hin.* Sei im Fall 1 wenigstens einmal $e_j > \frac{e_i - 1}{a_i} a_j$ für $j \neq i$. Wäre $\mathfrak{f} - \mathfrak{R} = \mathfrak{R}p^\sigma$, $(\mathfrak{f}_i : \mathfrak{p}_i) - \mathfrak{R} = \mathfrak{R}p^\varrho$ mit $\varrho < \sigma$, so ginge $\mathfrak{p}_i$ genau zur $(e_i - 1)$-ten Potenz in p^ϱ auf, also hätte man $\varrho = \frac{e_i - 1}{a_i}$. Demnach aber wäre stets $\frac{e_i - 1}{a_i} a_j \geqq e_j$, gegen die Voraussetzungen.

Entsprechend erledigt man 2.

B. *Aus den Furtwänglerschen Bedingungen folgt der Dedekindsche Satz.* Es bedeutet zunächst keine Einschränkung, wenn $\mathfrak{f}$ als ein Ideal mit einer Norm $N(\mathfrak{f}) = \mathfrak{R} \cdot p^\tau$ vorausgesetzt wird, wo p Primzahl in $\mathfrak{R}$ ist.

I. $\mathfrak{f}$ *und* $\mathfrak{f} : \mathfrak{p}$ *müssen in* $\mathfrak{R}$ *dasselbe Verengungsideal bestimmen, wenn* $\mathfrak{f}$ *Führer und* $\mathfrak{p}$ *beliebiges zugehöriges Primideal* 1. *Grades bez.* $\mathfrak{R}$ *ist.* Das folgt wie bei A II.

II. *Ist* $\mathfrak{p}$ *beliebiges zugehöriges Primideal* 1. *Grades und bestimmen* $\mathfrak{f}$ *und* $\mathfrak{f} : \mathfrak{p}$ *dasselbe Verengungsideal in* $\mathfrak{R}$, *so ist* $\mathfrak{f}$ *Führer.* — Der Beweis verläuft wie bei A I.

§ 6.

Anwendungen des Zerlegungssatzes.

1. Bestimmung der allgemeinen Primideale. Σ sei eine endliche nullteilerfreie P-Ordnung mit einem im Grundbereich P gelegenen Einheitselement; in P gelte mod. den vom Nullideal verschiedenen Idealen der Doppelkettensatz. Ferner sei Σ in seinem Quotientenkörper $\Omega(\Sigma)$ algebraisch ganz abgeschlossen. Nach N. § 8 gibt es dann in Σ nur solche Primideale $\mathfrak{p}$, deren zugehörige Primärideale $\mathfrak{q}$ Potenzen $\mathfrak{p}^e$ werden. Dagegen liegt in jedem P umfassenden, echten Unterring T von Σ, der mit Σ denselben Quotientenkörper $Q(\mathsf{T}) = Q(\Sigma)$ besitzt, nach N. § 9, 8 wenigstens ein Primideal, dessen zugehörige Primärideale aus ihm nicht sämtlich durch Potenzierung zu gewinnen sind. Diese letzteren Primideale sollen als *allgemeine*, die anderen als *spezielle* bezeichnet werden. Die genaue Bestimmung der allgemeinen Primideale einer P-Ordnung T aus Σ mit $Q(\mathsf{T}) = Q(\Sigma)$ wird geleistet durch den

Satz: *Alle und nur die zum Führer* $\mathsf{T}:\Sigma = \mathfrak{f}$ *gehörigen Primideale aus* T *sind allgemein.*

Zum Beweise zeigt man, daß für alle und nur die zu $\mathfrak{f}$ gehörigen Primideale $\mathfrak{p}$ aus T die Quadrate $\mathfrak{p}^2$ in T reduzibel, d. h. kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{c}_1 - \mathfrak{c}_2$ von echten Teilern $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ werden. $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ sind dann notwendig zu $\mathfrak{p}$ gehörige allgemeine[29]) Primärideale, also $\mathfrak{p}$ ein allgemeines Primideal.

Nach den Entwicklungen in G. § 7 leuchtet sofort ein, daß alle nicht zu $\mathfrak{f}$ gehörigen Primideale aus T sicher speziell sind. Gäbe es nämlich zu einem solchen Primideal $\mathfrak{p}$ ein allgemeines Primärideal $\mathfrak{q}$, so wäre, da $\mathfrak{p}$ und also auch $\mathfrak{q}$ zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd sind, das Erweiterungsideal $\mathfrak{q}\Sigma = \Omega$ in Σ allgemeines Primärideal. *Jedes allgemeine Primideal gehört also zum Führer.*

Etwas umständlicher ist der Nachweis, daß *alle zu* $\mathfrak{f}$ *gehörigen Primideale allgemein* sind. Ist $\mathfrak{f}$ Primärideal in T, besitzt es dort also lediglich ein einziges zugehöriges Primideal, so ist nach N. § 9 der Satz bewiesen. Es gelte also in T für $\mathfrak{f}$ die eindeutige Darstellung durch paarweise teilerfremde, größte primäre Ideale $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}_1 \dots \mathfrak{g}_s$ mit $s \geqq 2$. Nach G. § 8 erlaubt T eine Darstellung $\mathsf{T} = \mathsf{T}_1 \cdot \dots \cdot \mathsf{T}_s$ als direkter Durchschnitt bez. Σ[29a]) von Ringen $\mathsf{T}_i = \mathsf{T} + \mathfrak{f}_i$, wobei $\mathfrak{f}_i$ das zu $\mathfrak{g}_i$ gehörige Erweiterungsideal in Σ

[29]) Ein Primärideal heißt allgemein, wenn es nicht Potenz seines zugehörigen Primideals ist.

[29a]) Von dem Zerlegungssatz aus G. § 8 wird in Wirklichkeit nur benutzt, daß zwischen T und Σ Ringe T_i mit den angegebenen Eigenschaften liegen; die Darstellung als direkter Durchschnitt selbst findet keine Verwendung.

ist. Es gilt weiter $\mathsf{T} : \mathsf{T}_i = \mathfrak{g}_i' = \mathfrak{g}_1 \cdots \mathfrak{g}_{i-1}\, \mathfrak{g}_{i+1} \cdots \mathfrak{g}_s$, $\mathsf{T}_i : \Sigma = \mathfrak{f}_i$, sowie der Isomorphismus $\mathsf{T}_i \,|\, \mathfrak{f}_i \cong \mathsf{T} \,|\, \mathfrak{g}_i$. Also ist $\mathfrak{f}_i$ in T_i Primärideal. Da jedes T_i echter Unterring von Σ ist, wird nach N. § 9 das zu $\mathfrak{f}_i$ in T_i gehörige Primideal $\mathfrak{P}_i$ dort allgemein, indem nämlich $\mathfrak{P}_i^2$ reduzibel in T_i wird. Da mit $\mathfrak{P}_i$ auch $\mathfrak{P}_i^2$ in T_i zu $\mathfrak{g}_i'$ teilerfremd ist, wird das Quadrat des aus $\mathfrak{P}_i$ durch Verengung hervorgehenden Primideals $\mathfrak{p}_i$ reduzibel in T. Das Primideal $\mathfrak{p}_i$ aber ist wegen $\mathfrak{g}_i \geqq \mathfrak{p}_i$ das zu $\mathfrak{g}_i$, also eines der zu $\mathfrak{f}$ gehörigen Primideale. Da die Schlüsse für jedes i der Reihe $1, \ldots, s$ gelten, ist der Satz bewiesen.

2. Die abstrakte Fassung der Singularitätenauflösung. A. Über die Ringe P und Σ seien dieselben Voraussetzungen gemacht wie in § 4, 1: Σ sei eine endliche nullteilerfreie P-Ordnung mit einem im echten Unterring P gelegenen Einheitselement; P sei *Hauptidealring*. T bedeute einen P umfassenden Unterring von Σ, der mit Σ denselben Quotientenkörper $Q(\mathsf{T}) = Q(\Sigma)$ besitzt. Dann besteht der folgende

Kompositionsreihensatz. *Das Primärideal* $\mathfrak{q}$ *aus* T *sei größte primäre Komponente eines Hauptideals* $\mathsf{T}q$ *mit einem vom Nullelement verschiedenen Basiselement* q *aus* T. *Ist* $\mathfrak{q}$ *von der Länge* λ *und besitzt sein Erweiterungsideal* $\mathfrak{Q} = \mathfrak{q}\Sigma = \mathfrak{Q}_1 \ldots \mathfrak{Q}_s$ *die größten primären Komponenten* $\mathfrak{Q}_i$ *von der Länge* λ_i *und mit* $\mathfrak{P}_i$ *als zugehörigem Primideal, so wird*

$$\lambda = \lambda_1 g'(\mathfrak{P}_1) + \ldots + \lambda_s g'(\mathfrak{P}_s),$$

wo $g'(\mathfrak{P}_i)$ *den Grad von* $\mathfrak{P}_i$ *bez.* T *bedeutet.*

Um ihn zu gewinnen, beweist man zunächst den

Gradsatz [30]). *Das Primärideal* $\mathfrak{q}$ *aus* T *sei größte primäre Komponente eines Hauptideals* $\mathsf{T}q$ *mit einem vom Nullelement verschiedenen Basiselement* q *aus* T. *Bezeichnet dann* $\mathfrak{Q} = \mathfrak{q}\Sigma$ *das Erweiterungsideal von* $\mathfrak{q}$ *in* Σ, *so haben* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{Q}$ *in* T *und* Σ *denselben Grad bez.* P.

[30]) Im Oktober 1925 teilte mir B. L. v. d. Waerden den Beweis folgenden Satzes mit: „Sei $\mathfrak{R} = \mathsf{K}[z]$ der Polynombereich mit algebraisch abgeschlossenem Koeffizientenkörper, $\mathfrak{K} = \mathsf{K}(z)$, $\mathfrak{L}$ endliche Erweiterung 1. Art von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{S}$ der Ring aller $\mathfrak{R}$-ganzen Elemente aus $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{T}$ eine $\mathfrak{R}$-Ordnung in $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{L}$ als Quotientenkörper. Bezeichnet dann $\mathfrak{q}$ eine größte primäre Komponente eines *beliebigen* Hauptideals $\mathfrak{T}\tau \neq (0)$ aus $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{q}\mathfrak{S}$ das Erweiterungsideal in $\mathfrak{S}$, so haben die beiden K-Moduln $\mathfrak{S} \,|\, \mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{T} \,|\, \mathfrak{q}$ denselben Rang." Der Beweis arbeitet mit Nullstellenbetrachtungen und war deshalb nicht allgemein zu führen. Unter Benutzung wesentlicher Grundgedanken jedoch konnte mit Hilfe der §§ 7, 8 aus G. der obige Satz bewiesen werden. Daß der Gradsatz nicht für beliebige Primärideale gilt, bemerkte schon B. L. v. d. Waerden. Man erkennt es einfach, wenn man das Beispiel aus G. § 5, 3b zu Hilfe zieht. Das dort definierte Ideal $\mathfrak{p}$ ist in $\mathfrak{T}$ ein Primideal 1. Grades bez. des Ringes der ganzen rationalen Zahlen, das Erweiterungsideal $\mathfrak{p}\mathfrak{S} = \mathfrak{p}$ aber ist in $\mathfrak{S}$ Primideal 2. Grades. Entsprechendes gilt natürlich bez. des Kompositionsreihensatzes.

Beweis. Es kann offenbar $\mathfrak{q}$ als vom Einheitsideal T verschieden angenommen werden.

I. Ist $\mathfrak{q}$ und damit auch $\mathfrak{Q}$ *zum Führer* $\mathfrak{f} = \mathsf{T} : \Sigma$ *teilerfremd*, so besitzen die beiden Ideale in T und Σ nach G. § 7, Hilfssatz 1 isomorphe Restklassenringe, also in T und Σ denselben Grad $g(\mathfrak{q}) = g(\mathfrak{Q})$ bez. P[31]); in diesem Fall ist man fertig.

II. Im andern Fall beweist man zunächst den

Hilfssatz. Ist Γ eine beliebige Unterordnung von Σ mit dem Quotientenkörper $Q(\Gamma) = Q(\Sigma)$, so haben die beiden Ideale $\Gamma\mathfrak{q}$ und $\Sigma\mathfrak{q}$ in Γ und Σ denselben Grad bez. P.

Beweis[32]). Zufolge Satz 3 aus § 4 wird der Hilfssatz bewiesen sein, wenn gezeigt werden kann, daß $N_{\mathsf{T}}(\mathsf{T}\mathfrak{q}) = N_{\Sigma}(\Sigma\mathfrak{q})$ ist; dabei ist $N_{\mathsf{T}}(\mathsf{T}\mathfrak{q}) = N(\mathsf{T} \mid \mathsf{T}\mathfrak{q})$, $N_{\Sigma}(\Sigma\mathfrak{q}) = N(\Sigma \mid \Sigma\mathfrak{q})$, wenn $\mathsf{T}, \mathsf{T}\mathfrak{q}, \Sigma, \Sigma\mathfrak{q}$ als P-Moduln aufgefaßt werden (vgl. § 1, 4b). Zu dem Zweck nun macht man folgende

Vorbemerkungen. 1. *Für jedes vom Nullelement verschiedene Element* φ *des Führers* $\mathfrak{f} = \mathsf{T} : \Sigma$ *gilt* $N_{\mathsf{T}}(\mathsf{T}\varphi) = N_{\Sigma}(\Sigma\varphi)$.

Beweis. Für die P-Moduln $\mathsf{T}\varphi$, $\Sigma\varphi$, T, Σ besteht die Modulisomorphie $\Sigma\varphi \mid \mathsf{T}\varphi \simeq \Sigma \mid \mathsf{T}$, also ist nach § 1, 4b erfüllt $N(\Sigma\varphi \mid \mathsf{T}\varphi) = N(\Sigma \mid \mathsf{T})$. Wegen $\mathsf{T}\varphi \geqq \Sigma\varphi \geqq \mathfrak{f} \geqq \mathsf{T} \geqq \Sigma$ gilt weiter

$$N_{\Sigma}(\Sigma\varphi) = N(\Sigma \mid \Sigma\varphi) = N(\Sigma \mid \mathsf{T}) \cdot N(\mathsf{T} \mid \Sigma\varphi) = N(\mathsf{T} \mid \Sigma\varphi) \cdot N(\Sigma\varphi \mid \mathsf{T}\varphi)$$
$$= N(\mathsf{T} \mid \mathsf{T}\varphi) = N_{\mathsf{T}}(\mathsf{T}\varphi), \text{ w. z. b. w.}$$

2. *In einer beliebigen* P*-Ordnung* Γ *ist für zwei beliebige Elemente* α, β *erfüllt*

$$N_{\Gamma}(\Gamma\alpha\beta) = N_{\Gamma}(\Gamma\alpha) \cdot N_{\Gamma}(\Gamma\beta).$$

Beweis. Offenbar dürfen α, β beide $\neq 0$ vorausgesetzt werden. Wegen der Modulisomorphie $\Gamma\alpha \mid \Gamma\alpha\beta \simeq \Gamma \mid \Gamma\beta$ wird $N(\Gamma\alpha \mid \Gamma\alpha\beta) = N(\Gamma \mid \Gamma\beta)$, also

$$N_{\Gamma}(\Gamma\alpha\beta) = N(\Gamma \mid \Gamma\alpha\beta) = N(\Gamma \mid \Gamma\alpha) \cdot N(\Gamma\alpha \mid \Gamma\alpha\beta) = N(\Gamma \mid \Gamma\alpha) \cdot N(\Gamma \mid \Gamma\beta)$$
$$N_{\Gamma}(\Gamma\alpha) \cdot N_{\Gamma}(\Gamma\beta), \text{ w. z. b. w.}$$

---

[31]) Es handelt sich immer um isomorphe Restklassenmoduln mit demselben Multiplikatorenbereich.

[32]) Der hier gegebene Beweis des Hilfssatzes ist eine nach der ersten Korrektur vorgenommene, gegenüber der ursprünglichen Fassung wesentliche Änderung. Dadurch erst wurde es möglich, die zuerst dem Element q auferlegte Bedingung, daß es nämlich dem Grundbereich P entstammen sollte, fallen zu lassen und den Kompositionsreihensatz in seiner jetzigen allgemeineren Form auszusprechen. Notwendig ergaben sich daraus auch gewisse Modifikationen des Abschnittes B.

Nunmehr verläuft der Beweis des Hilfssatzes so: Da T und Σ denselben Quotientenkörper haben, ist nach § 5 der Führer $\mathfrak{f} = \mathsf{T} : \Sigma$ vom Nullideal verschieden. Ist also $\varphi \neq 0$ ein Element aus $\mathfrak{f}$, so wird auch $\varphi \cdot q \equiv 0\,(\mathfrak{f})$, und man hat nach den Vorbemerkungen

$$N_\Sigma(\Sigma\varphi)\cdot N_\Sigma(\Sigma q) = N_\Sigma(\Sigma\varphi q) = N_\mathsf{T}(\mathsf{T}\varphi q) = N_\mathsf{T}(\mathsf{T}\varphi)\cdot N_\mathsf{T}(\mathsf{T}q).$$

Da in P wegen der eindeutigen Darstellbarkeit eines Ideals als Produkt von Primidealpotenzen gilt, daß aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}$ bei $\mathfrak{a} \neq (0)$ stets $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ folgt, hat man wegen $N_\Sigma(\Sigma\varphi) = N_\mathsf{T}(\mathsf{T}\varphi) \neq (0)$ schließlich $N_\Sigma(\Sigma q) = N_\mathsf{T}(\mathsf{T}q)$, w. z. b. w.

Der Beweis des Gradsatzes ergibt sich nun so:

1. Ist $\mathsf{T}q = \mathfrak{q}$, also $\Sigma q = \mathfrak{Q}$, so ist der Satz erledigt.

2. Dasselbe ist der Fall, wenn $\mathsf{T}q$ in mindestens zwei Primärkomponenten in T zerfällt, aber $\mathfrak{q}$ die einzige zu $\mathfrak{f}$ nicht teilerfremde ist.

Wird nämlich $\mathsf{T}q = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_s$, $\Sigma q = \mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_s$ (mit $\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{q}_i\Sigma$), und etwa $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1$, so haben $\mathfrak{q}_1' = \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_s$ und $\mathfrak{Q}_1' = \mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_s$ nach I denselben Grad $g(\mathfrak{q}_1') = g(\mathfrak{Q}_1')$. Wegen $g(\mathsf{T}q) = g(\Sigma q)$ aber kommt

$$g(\mathfrak{q}_1) = g(\mathsf{T}q) - g(\mathfrak{q}_1') = g(\Sigma q) - g(\mathfrak{Q}_1') = g(\mathfrak{Q}_1).$$

3. $\mathsf{T}q$ besitze also mindestens zwei zu $\mathfrak{f}$ nicht teilerfremde Primärkomponenten $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$. Dann besteht in T für den Führer die eindeutige Darstellung $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}_1 \ldots \mathfrak{g}_k$ mit $k \geqq 2$. Man darf annehmen, daß $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{g}_1$ dasselbe zugehörige Primideal $\mathfrak{p}_1$ besitzen. Wie in 1. werde T dargestellt in der Form $\mathsf{T} = \mathsf{T}_1 \dotplus \ldots \dotplus \mathsf{T}_k$[29a]) mit $\mathsf{T}_i = \mathsf{T} + \mathfrak{f}_i$ und $\mathfrak{f}_i = \mathfrak{g}_i\Sigma$. Es wird noch $\mathsf{T} : \mathsf{T}_1 = \mathfrak{g}_1'$; $\mathsf{T}_1 : \Sigma = \mathfrak{f}_1$.

Wegen $\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{g}_1' = \mathsf{T}$ hat man für das Erweiterungsideal $\bar{\mathfrak{q}}_1 = \mathfrak{q}_1\mathsf{T}_1$ von $\mathfrak{q}_1$ den Isomorphismus $\mathsf{T}_1 \,|\, \bar{\mathfrak{q}}_1 \simeq \mathsf{T} \,|\, \mathfrak{q}_1$. Somit haben $\mathfrak{q}_1$ und $\bar{\mathfrak{q}}_1$ denselben Grad $g(\mathfrak{q}_1) = g(\bar{\mathfrak{q}}_1)$.

Setzt man weiter $\mathfrak{q}_1'\mathsf{T}_1 = \bar{\mathfrak{q}}_1'$, so haben $\bar{\mathfrak{q}}_1'$ und $\mathfrak{Q}_1$ denselben Grad; denn aus $\mathfrak{q}_1' + \mathfrak{g}_1 = \mathsf{T}$ folgt $\bar{\mathfrak{q}}_1' + \mathfrak{g}_1\mathsf{T}_1 = \mathsf{T}_1$, also $\bar{\mathfrak{q}}_1' + \mathfrak{f}_1 = \mathsf{T}_1$ und somit nach I die Richtigkeit der Behauptung. Wegen $g(\mathsf{T}_1 q) = g(\Sigma q)$ aber schließt man dann

$$g(\mathfrak{q}_1) = g(\bar{\mathfrak{q}}_1) = g(\mathsf{T}_1 q) - g(\bar{\mathfrak{q}}_1') = g(\Sigma q) - g(\mathfrak{Q}_1') = g(\mathfrak{Q}_1).$$

Verfährt man so für jede der zu $\mathfrak{f}$ nicht teilerfremden Komponenten, so ist der Satz bewiesen.

Unmittelbar aus dem Gradsatz ergibt sich der

Beweis des Kompositionsreihensatzes. Wieder darf $\mathfrak{q}$ als vom Einheitsideal verschieden angenommen werden. Nach dem Gradsatz wird

$g(\mathfrak{q}) = g(\mathfrak{Q})$, also nach Satz 1 und 2 aus § 3 $\lambda g(\mathfrak{p}) = \lambda_1 g(\mathfrak{P}_1) + \ldots + \lambda_s g(\mathfrak{P}_s)$, wenn $\mathfrak{p}$ das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal ist und alle Grade bzw. P genommen sind. Da alle $\mathfrak{P}_i$ in T das Ideal $\mathfrak{p}$ als Verengungsideal liefern, so überzeugt man sich leicht, daß $g(\mathfrak{P}_i) = g'(\mathfrak{P}_i) \cdot g(\mathfrak{p})$ wird. Damit aber ist wegen $g(\mathfrak{p}) \neq 0$ der Satz bewiesen.

B. Macht man über den Quotientenkörper von Σ einschränkende Voraussetzungen, so kann die Hauptidealeigenschaft für P abgeschwächt werden. Sei nämlich wie in § 2, 3 P ein nullteilerfreier *Multiplikationsring*, $\mathfrak{L}$ *endliche Erweiterung 1. Art* des Quotientenkörpers $\mathfrak{K} = Q(\mathsf{P})$, T und Σ zwei endliche P-Ordnungen aus $\mathfrak{L}$ mit demselben Quotientenkörper $\mathfrak{L} = Q(T) = Q(\Sigma)$. Dann gilt ebenfalls der Kompositionsreihensatz.

Es genügt, den Gradsatz für vom Einheitsideal T verschiedene Ideale zu beweisen; den Kompositionsreihensatz erschließt man daraus genau wie unter A.

Den Beweis des Gradsatzes in B. führt man mittels des Satzes 4 aus § 2 auf den Gradsatz in A. zurück.

Sei gesetzt $\mathsf{T}\mathfrak{q} = \mathfrak{m}^*$, $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}^* - \mathsf{P}$, $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}\,\mathsf{T}$, $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{m}}\,\Sigma$; $\overline{m}$, m, M bezeichne das System der zu $\overline{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{M}$ teilerfremden Elemente aus $\mathsf{P}, \mathsf{T}, \Sigma$; $\mathsf{P}' = \frac{\mathsf{P}}{\overline{m}}$, $\mathsf{T}' = \frac{\mathsf{T}}{m}$, $\Sigma' = \frac{\Sigma}{M}$ die daraus abgeleiteten Quotientenringe. P′ wird nach § 2, 1 II Hauptidealring, T′ und Σ' nach Satz 4 desselben Paragraphen jeder eine endliche P-Ordnung mit demselben Quotientenkörper $Q(\mathsf{T}') = Q(\Sigma')$. Schreibt man $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}\mathsf{T}'$, $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}\Sigma'$, so wird $\mathfrak{q}'\Sigma' = \mathfrak{Q}'$. Ferner ist $\mathfrak{q}'$ größte primäre Komponente von $\mathsf{T}'\mathfrak{q} = \mathfrak{m}^{*\prime}$, wie aus den Entwicklungen in § 2 und G. § 6 sofort folgt, und eben daraus ergibt sich noch $\mathsf{T} \mid \mathfrak{q} \simeq \mathsf{T}' \mid \mathfrak{q}'$ und $\Sigma \mid \mathfrak{Q} \simeq \Sigma' \mid \mathfrak{Q}'$.

Nach dem Gradsatz in A. haben nun die beiden Ideale $\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{Q}'$ in T′ und Σ' denselben Grad bez. P′. Der bei der Graddefinition auftretende Multiplikatorenbereich $\overline{\mathfrak{K}}'$ der den beiden Restklassenringen $\mathsf{T}' \mid \mathfrak{q}'$ und $\Sigma' \mid \mathfrak{Q}'$ entsprechenden Gradmoduln ist der Restklassenkörper des Ringes P′ nach dem zu $\overline{\mathfrak{q}}' = \mathfrak{q}' - \mathsf{P}'$ gehörigen Primideal $\overline{\mathfrak{p}}'$, während entsprechend der Multiplikatorenbereich $\overline{\mathfrak{K}}$ der den Restklassenringen $\mathsf{T} \mid \mathfrak{q}$ und $\Sigma \mid \mathfrak{Q}$ zugehörigen Gradmoduln der Restklassenkörper des Ringes P nach dem zu $\overline{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} - \mathsf{P}$ gehörigen Primideal $\overline{\mathfrak{p}}$ wird.

Wegen $\overline{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} - \mathsf{P} = \mathfrak{q}' - \mathsf{T} - \mathsf{P} = \mathfrak{q}' - \mathsf{P} = \mathfrak{q}' - \mathsf{P}' - \mathsf{P} = \overline{\mathfrak{q}}' - \mathsf{P}$ sind $\overline{\mathfrak{q}}$ und $\overline{\mathfrak{q}}'$, also auch $\overline{\mathfrak{p}}$ und $\overline{\mathfrak{p}}'$ einander entsprechende ausgezeichnete Ideale aus P und P′ (G. § 6, Satz, Folgerung). Somit kommt nach § 2, Satz 2 der Isomorphismus $\overline{\mathfrak{K}} \simeq \overline{\mathfrak{K}}'$, und wegen $\mathsf{T}' \mid \mathfrak{q}' \simeq \mathsf{T} \mid \mathfrak{q}$ und $\Sigma' \mid \mathfrak{Q}' \simeq \Sigma \mid \mathfrak{Q}$ folgt, daß $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{Q}$ bez. P denselben Grad haben wie $\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{Q}'$ bez. P′. D. h. aber: $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{Q}$ haben gleichen Grad bez. P, w. z. b. w.

C. Wird P als Polynombereich $K[z]$ mit algebraisch abgeschlossenem Koeffizientenkörper K, Σ als Ring aller P-ganzen Elemente einer endlichen Erweiterung 1. Art Ω von $K(z)$, T als eine P-Ordnung in Σ mit Ω als Quotientenkörper angenommen, so wird der Restklassenkörper nach einem Primideal des Ringes P isomorph dem Körper K, und es gibt somit in allen P-Ordnungen aus Σ nur Primideale 1. Grades bez. P. Der Gradsatz wird hier zum v. d. Waerdenschen Rangsatz; die Gradzahlen $g'(\mathfrak{P}_i)$ des Kompositionsreihensatzes werden gleich 1, so daß die Länge λ des Primärideals $\mathfrak{q}$ in T gleich der Summe der Längen der Primärideale $\mathfrak{Q}_i$, d. h. gleich der Länge des Ideals $\mathfrak{Q}$ in Σ wird.

(Eingegangen am 18. 5. 1926.)

Lebenslauf.

Ich, Heinrich Grell, wurde geboren zu Lüdenscheid am 3. Februar 1903 als Sohn des Metzgermeisters Heinrich Grell und seiner Frau Emilie, geb. Pieper. Nach vierjährigem Besuch der Volksschule trat ich 1913 in das Realgymnasium meiner Vaterstadt ein und legte dort Ostern 1922 die Reifeprüfnng ab. Meine gesamte Studienzeit verbrachte ich in Göttingen. Hauptsächlich beschäftigte ich mich mit Mathematik und hörte Vorlesungen bei den Professoren:

Ambronn, Courant, Gudden, Hilbert, Kienle, Landau, E. Noether, Pohl, sowie eine Gastvorlesung bei Prof. Alexandroff aus Moskau.

Allen meinen Lehrern sage ich meinen herzlichsten Dank. Vor allen gilt er Prof. Courant und Herrn Alexandroff für das meinem Studiengang fortdauernd bekundete Interesse, insbesondere aber Frl. Noether, die zuerst meine Neigungen in die rechte Bahn lenkte, indem sie mir durch Vorlesungen und Gespräche Dedekind nahe brachte, durch dessen Werke die vorliegende Arbeit am stärksten beeinflußt ist, und die jederzeit meine gesamte Entwicklung verständnisvoll überwachte und förderte.